

托卡马克中的介观演化：势涡的共振和非共振输运

(申请清华大学工学博士学位论文)

培养单位：工程物理系

学 科：核科学与技术

研 究 生：晏庆豪

指导教师：高 喆 教 授

联合导师：Patrick H. Diamond教授

二〇二二年五月

**Mesoscopic Evolution in Tokamaks:
Resonant and Nonresonant Transport of
Potential Vorticity**

Dissertation Submitted to

Tsinghua University

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Doctor of Philosophy

in

Nuclear Science and Technology

by

Yan Qinghao

Dissertation Supervisor: Professor Gao Zhe

Co-supervisor: Professor Patrick H. Diamond

May, 2022

学位论文公开评阅人和答辩委员会名单

公开评阅人名单

蒲以康	教授	清华大学
李定	教授	中国科学院物理研究所

答辩委员会名单

主席 委员	蒲以康	教授	清华大学
	高喆	教授	清华大学
	谭熠	副教授	清华大学
	李定	教授	中国科学院 物理研究所
	许敏	研究员	核工业西南物理研究院 聚变科学所
秘书	陈伟	研究员	核工业西南物理研究院 聚变科学所
	谭熠	副教授	清华大学

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容；（3）根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》及上级教育主管部门具体要求，向国家图书馆报送相应的学位论文。

本人保证遵守上述规定。

作者签名： 李庆豪

导师签名： 高培

日期： 2022年5月22日 日期： 2022年5月22日

摘要

论文从一个简化的但具有代表性的动理学 Darnet 模型出发, 构建了一个势涡守恒系统。以势涡系统为载体, 围绕托卡马克中的两个介观尺度(介于微观回旋半径和宏观装置尺寸)问题: 湍流自扩散和 $E \times B$ 台阶进行了研究, 成果归纳如下。

第一, 推导出了一个包含显式非局域性的湍流自扩散模型。模型描述了以电势强度表征的湍流强度的演化过程, 其中的显式非局域增长是最主要的新效应。非局域性来源于极化电荷, 在模型中体现为一个格林函数的卷积。卷积核的宽度决定了非局域性的范围, 其量级为捕获离子的轨道宽度。湍流自扩散过程中, 锋面传播速度以及锋面穿透进入线性稳定区的深度, 都被非局域效应增强。该模型相较于传统模型有着更为严格的推导过程, 并且从理论上给出了托卡马克内的一种新的内秉非局域性。模型在高能量粒子和湍流相互作用、大型模拟程序结果的理解等问题上都有潜在应用。

第二, 推导、建模了一套剖面台阶演化的模型, 其中的共振输运发挥了重要作用。我们利用了准线性近似、色散关系模型、双洛伦茨谱等方法, 建立了通量与温度、涡度剖面的关系, 进而闭合了剖面演化方程。剖面方程结合拓展的湍流强度演化方程给出了一个湍流-剖面演化系统, 我们利用解析和数值的方法对其加以研究。结果中存在由 $E \times B$ 平均流决定的两种输运和剖面状态: 一是由共振湍流输运调控的共振(类雪崩)态, 其温度剖面较为平缓(近临界状态); 二是由非共振湍流输运调控的非共振态, 其剖面更为陡峭。剖面在演化中自发地形成一种台阶状准周期性模式, 即上述两种状态在空间上的交替排列。针对剖面台阶现象, 论文从理论的角度给出了以下结果: a) 台阶现象中的反馈过程; b) 台阶现象触发所需边界热流临界值估计; c) 台阶宽度的估计。与以往的结果比较: 本论文得到了捕获离子进动、 $E \times B$ 平均流、捕获离子模式三者作用达成共振这一新机制, 其引发的共振输运既是剖面台阶形成的新机制, 也可实现带状流的无碰撞饱和。论文首次给出了台阶触发所需边界热流条件; 首次给出台阶宽度与香蕉轨道宽度、共振和非共振输运系数的比值、边界热流等之间的联系。该模型可以和内部输运垒相关研究建立联系, 甚至有可能启发新运行模式, 比如约束增强型 L 模。

最后, 由于论文中的势涡守恒系统建立在对捕获离子模的研究上, 所以有拓展到高能粒子与湍流相互作用研究的可能性。

关键词: 聚变; 湍流; 介观演化; 自组织结构; $E \times B$ 台阶

Abstract

This thesis starts from a simplified yet representative kinetic system, i.e. the Darnet model, then construct a conserved potential-vorticity (PV) system from it. Then we apply this PV system to two mesoscopic (between microscale like gyroradius and macroscale like device size) phenomena in Tokamaks: turbulence spreading and the $E \times B$ staircase. The results are summarized below.

The first outcome is an explicitly nonlocal turbulence spreading model. The model describes the evolution of the turbulence intensity-characterized by the electric potential intensity-in which explicit non-local growth is the most important new effect. The non-locality originates from the polarization charge, which is represented in the model as a convolution with Green's functions. The width of the convolution kernel determines the range of the non-locality, which is in the order of the orbit width of the trapped ion-banana width. In the process of turbulent spreading, the propagation velocity of the front and the penetration depth of the front into the linearly stable region are enhanced by the non-local effect. This model is derived more rigorously than older models were derived. The nonlocal effects proposed in the model is intrinsic to Tokamaks. This model has further potential applications in the interaction of energetic particles and turbulence and the understanding of large simulation programs.

The second outcome is a model for profile staircase formation, in which resonant transport plays an important role. Using quasi-linear approximation, a model dispersion relation, bi-Lorentz spectrum etc., we construct the relationship between fluxes and the temperature and vorticity profiles. With these fluxes, we close the profile evolution equations and the extended turbulence intensity evolution equation, which together constitutes a turbulence-profile evolution system. Then we use analytical and numerical methods to study this system. As results, there are two states of transport and profiles, which are determined by $E \times B$ mean flow. Specifically, there is the resonant (avalanche-like) state, which is regulated by resonant turbulent transport, with its temperature profiles are relatively flat (near marginal state). The non-resonant state, which is regulated by non-resonant turbulent transport, has steeper profiles than the resonant state. During the evolution of the model, a quasi-periodic pattern of profiles spontaneously emerges, in which the two states are arranged as alternative layers in space. This thesis analyzed this stair-

case profile system and obtain the following results from a theoretical perspective: a) the feedback processes during the staircase formation, b) an estimation of the critical value of the boundary heat flux, above which the staircase will be triggered, c) the estimation of the step size. Comparing to older studies: The resonance mechanism through trapped ion precession, $E \times B$ mean flow and trapped ion mode is new; the resonant transport is, on one hand, a new mechanism for $E \times B$ staircase formation, on the other hand, a new mechanism for collisionless saturation of zonal flow. This thesis obtains the staircase trigger condition for the first time and obtains the relationship between step size and the banana orbit width, the ratio between resonant and non-resonant transport, and the boundary heat flux for the first time. This work is related to ITB and may suggest some new scenarios, like an enhanced confined L mode.

Since the potential vorticity conserving system in this thesis is based on trapped ion mode, there is also the possibility of further generalization to the problems of energetic particles and turbulence interactions.

Keywords: fusion; turbulence; mesoscopic evolution; self-organization structure; $E \times B$ staircase

目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	II
目 录.....	IV
插图和附表清单.....	VI
符号和缩略语说明.....	X
第 1 章 引言.....	1
1.1 研究背景.....	2
1.1.1 回旋波姆定标率的失效.....	2
1.1.2 介观物理过程.....	3
1.2 国内外研究现状.....	5
1.2.1 湍流自扩散.....	5
1.2.2 雪崩输运.....	12
1.2.3 $E \times B$ 台阶.....	16
1.3 研究内容和研究意义.....	25
1.4 研究方案.....	25
第 2 章 势涡守恒系统.....	27
2.1 Darnet 模型.....	27
2.2 势涡演化的导出.....	28
2.3 势涡通量和涡量拟能.....	31
2.4 色散关系.....	32
2.4.1 线性不稳定性的阈值.....	34
2.4.2 实频率和增长率.....	35
第 3 章 势涡守恒系统应用 1: 湍流自扩散模型.....	37
3.1 湍流强度演化方程的推导.....	37
3.1.1 势涡 \tilde{U} 演化方程.....	37
3.1.2 涡量拟能 $\langle \tilde{U}^2 \rangle$ 的推导.....	38
3.1.3 非线性项的简化: 准线性闭包.....	40
3.1.4 从涡量拟能 $\langle \tilde{U}^2 \rangle$ 到电势强度 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 演化.....	42

3.2 强度方程的数值研究.....	50
3.3 小结.....	55
第 4 章 势涡守恒系统应用 2: 剖面台阶.....	57
4.1 准线性通量.....	57
4.1.1 热通量.....	58
4.1.2 涡量通量.....	59
4.1.3 共振和非共振输运.....	60
4.1.4 拓展的湍流强度演化方程.....	61
4.2 输运系数模型.....	62
4.2.1 非共振输运系数的简化.....	63
4.2.2 共振输运系数的简化.....	64
4.2.3 一个统一的输运系数模型.....	67
4.2.4 关于临界剖面的假设.....	68
4.3 剖面演化: $E \times B$ 台阶的形成.....	70
4.3.1 方程和边界条件.....	70
4.3.2 数值结果和剖面的基本行为.....	71
4.3.3 台阶出现的条件.....	75
4.3.4 台阶的特征.....	78
4.3.5 关于实现临界剖面的讨论.....	80
4.4 小结.....	81
第 5 章 结论.....	83
参考文献.....	86
附录 A 补充内容.....	91
致 谢.....	94
声 明.....	95
个人简历、在学期间完成的相关学术成果.....	96
指导教师学术评语.....	97
答辩委员会决议书.....	98

插图和附表清单

图 1.1	归一化约束时间和相对回旋半径之间存在的 Bohm 和 gyro-Bohm 定标率。数据点来自 DIII-D 和 JET 运行在 ITER-like ELMy H-mode ^[5]	3
图 1.2	(a) 图中, 在线性不稳定区内, 湍流通过一个稳定的波前传播 ^[20] 。(b) 图给出一种湍流自扩散的机制, 即逆向级联产生大的对流单元, 从而有效地输运小尺度湍流和内能 ^[21]	6
图 1.3	(a) 图离子热输运系数随装置小半径变化, 遵循从“Bohm”到“gyro-Bohm”定标的变化关系 ^[4] ; (b) 图采用 $\rho_{*,\text{eff}} = \rho_*/2W$ 表征系统尺寸, 并比较了不同回旋动理学程序的结果 ^[31]	8
图 1.4	不同磁剪切下的 (a) 湍流波前位置 (b) 浸润深度。安全因子对湍流自扩散的抑制只在低磁剪切下效果明显 ^[34]	9
图 1.5	方程 (1.3) 随时间的演化, 参数与图 1.6 中 GTC 模拟参数相似 ^[36]	9
图 1.6	GTC 模拟中湍流强度随时间的演化 ^[36]	9
图 1.7	GTS 模拟给出湍流在径向上可以穿过不同大小的径向电场剪切形成的输运垒 ^[37]	10
图 1.8	在靶等离子体 (a) 和 ITB 等离子体 (b) 中测量的红外密度扰动 (蓝) 和等离子体密度剖面 (红)。第二行为 FULL 代码计算的线性增长率 ^[38]	10
图 1.9	在 $r/a = 0.65$ 处用 BES 观察密度扰动随时间变化 ^[39]	11
图 1.10	(a) 线平均密度和 H_α 信号随时间的演化, (b) E_r 和 (c) 密度扰动在相对 E_r 剪切不同位置时随时间的演化 ^[40]	11
图 1.11	磁岛中穿过 X-点 (粉色) 和 O-点 (蓝色) 的温度扰动功率剖面 ^[41]	11
图 1.12	磁岛附近单次湍流自扩散事件中电子温度 T_e 的相对变化 ^[42]	11
图 1.13	Hurst 指数测量的是系统的记忆 ^[45]	13
图 1.14	BTW 中设定的元胞自动机规则 ^[47]	14
图 1.15	自组织临界态中受到扰动 (比如黑色块区围绕的白色点) 后出现的最小稳定簇 (黑色区域) ^[47]	14
图 1.16	沙堆模型功率谱 ^[48]	14
图 1.17	Bump 沿梯度向下移动, Void 向上移动, 从而满足反射对称性 ^[50]	15
图 1.18	归一化的温度扰动在不同径向位置的测量, 灰色方框内为小的雪崩输运事件 ^[12]	16
图 1.19	平均温度分布中的褶皱和 $E \times B$ 剪切流的位置存在重合 ^[11]	18

图 1.20	湍流自相关长度（蓝色点线）、台阶宽度（绿色点）和影响长度（红线）以及其他物理量的比较 ^[11]	18
图 1.21	热通量和温度梯度之间的卷积核可用一个 Cauchy-Lorentz 分布函数近似 ^[11]	18
图 1.22	TOKAM2D 中不同几何因子 g 下的平均电势等高图：(a) 1.2×10^{-4} , (b) 1.5×10^{-4} , (c) 2×10^{-4} , (d) 5.7×10^{-4} ^[58]	19
图 1.23	TERESA 程序计算得到的参数 λ 取不同值时的温度剖面 ^[59]	19
图 1.24	左图为模拟中剪切流-平均分布之间的相互作用，右上图为 GYSELA 计算得到扰动相关长度，右下为 ToreSupra 中，反射计测量得到的相关长度，可见在 S_0, S_1, S_2, S_3 处可能存在剪切层，从而可能存在台阶 ^[7]	20
图 1.25	KSTAR 中 ECEI 测量得到温度台阶 ^[12]	21
图 1.26	HL-2A 中 ECE 和反射计测量得到温度台阶 ^[13]	21
图 1.27	DIII-D 中测量结果 (d) - (g) 为扰动量和 $E \times B$ 环向转动频率沿径向分布 ^[9]	21
图 1.28	BOUT++ 对 EAST 中 Grassy ELM 和 Type-I ELM 实验的模拟结果 ^[10] ，注意到压强剖面 (a) 中出现的两级台基	21
图 1.29	左上图为向上传播的台阶；右上图中剪切层从产生的位置处离开，向边界传播；左下图中密度梯度沿等离子体径向的变化 ^[60] 。右下图为随着参数 β （表征湍流自扩散强度）的逐渐增大，在模拟早期观察到的台阶数量减少 ^[8]	23
图 1.30	不同通量梯度关系的示意图 ^[57]	25
图 1.31	研究路线图	26
图 2.1	剖面的特征尺度 L_T 定义如图 (a)。对于一个如图 (b) 的褶皱剖面没有合适的 L_T 可供定义	30
图 2.2	对不同的 (ρ, δ) 所能取到的最大 $k_{x,\max}, k_{y,\max}$ 。按照离散的波数得到扫描结果，可以用 $\rho_i^2 k_y^2 + \delta_b^2 k_r^2 = 1.17$ 拟合数据点，如图中虚线所示	34
图 2.3	色散关系的数值结果。 $\delta_b^2 = 0.01, \rho^2 = 0.004, k_x = \pi$ 。(a) 不同 κ_T 给出的实频率，灰线是近似曲线 $2.36k_y$ 。(b) 不同 κ_T 给出的增长率，灰线是基于模型 (2.41) 给出的拟合曲线。在不同 κ_T 下分别有 Λ/ρ 为 0.223, 0.292, 0.30935	
图 3.1	湍流自扩散过程的示意图。可以定义传播锋面的“Head”、“Center”、“Foot”以描述其形状。穿透进入线性稳定区的深度定义为 Δ_p ，等效深度定义为 S_p 。 S_l 是线性不稳定区内损失的湍流强度	49

图 3.2	(a) 设定的线性不稳定区间。(b) 方程 (3.27) 在 $l_r = 10^{-2}$ 下的演化, 每个剖面的时间间隔是 10.....	51
图 3.3	不同方程的演化过程: (a) 方程 (3.29a), 无非局域扩散; (b) 方程 (3.29b), 有非局域增长。 $l_r = \rho_* = 10^{-2}, \delta_{b*} = 10^{-1}$ 。每个剖面的时间间隔是 3。红色竖线代表线性增长率的分界线。边界条件 (3.37) 在 (a) 中成功地实现了 Neumann 边界条件。在 (b) 中, 非局域增长项和我们的边界设定并不兼容, 不过只要边界离演化中的锋面足够远就不会对锋面的传播和穿透产生影响.....	51
图 3.4	不同模型演化得到的锋面传播速度, 固定 $l_{r*} = 0.01$, 改变 δ_{b*} 。浅色的数据点代表 $\delta_{b*} < l_{r*}$ 的情况, 在拟合直线时剔除了 (香蕉轨道宽度在物理上不能小于回旋半径)。当 $\delta_{b*} \rightarrow 0$ 时, 速度将会回归到 $\sqrt{2\gamma D} = 0.01$ 。来自 NG&ND 和 NG&LD 的数据点基本重合, 说明非局域增长项占主导.....	52
图 3.5	不同方程在固定 $l_{r*} = 10^{-2}$, 变化 δ_{b*} 时产生的传播锋面的情况。非局域效应会以一个正比于 δ_{b*} 的比例展宽锋面形状。当 δ_{b*} 趋于 0 时, 模型退化到传统模型。(b) 和 (c) 中的结果的差异几乎无法分辨, 意味着非局域增长项起到了主要作用.....	53
图 3.6	锋面穿透进入稳定区。(a) 和 (b) 对应于方程 (3.29a), 其中没有非局域扩散项。(c) 和 (d) 对应于方程 (3.29b), 其中包含非局域增长项。 δ_{b*} 在 (0, 0.01, 0.1, 0.15, 0.2) 范围内变化。(a) 和 (c) 为 $t\gamma_L = 300$ 时的锋面.....	54
图 3.7	不同方程的 (a) 锋面穿透深度 Δ_p 和 (b) 有效穿透深度 S_p 随 δ_{b*} 的变化。所有的曲线对应的时间为 $t\gamma_L = 300$ 。在 $\delta_{b*} > l_{r*}$ 时, 从图中可以得到一个对 Δ_p 和 S_p 的简单的线性拟合关系, 浅色点被排除在拟合数据点之外..	55
图 3.8	不稳定区内平均湍流强度 (输运系数) 随 l_{r*}^{-1} 的变化.....	55
图 4.1	Θ_{res} 和 Ω_Z 的关系。仅当 Ω_Z 处在一定范围内才可能出现共振, 共振所需的阈值大概为 $\Omega_Z > \Omega_D$ 。当 Ω_Z 过大时 ($\sim 1.5\Omega_D$), 共振条件 $\Theta_{\text{res}} > 1$ 在物理上不能成立。不同的线代表公式 (4.19) 中拟合参数 R 取不同值时的结果.....	65
图 4.2	χ 和 Ω_Z 的分段函数。当 Ω_Z 不在共振条件范围内时, 取 $\chi = \chi^n \tilde{\phi}_0 ^2$; 当 $1 < \Omega_Z/\Omega_D < 1.5$ 时, 取 $\chi = \chi^r \tilde{\phi}_0 ^2$ 。在共振阈值附近设置了展宽 w_Ω	67
图 4.3	热通量的推导流程示意图.....	69
图 4.4	涡量通量的推导流程示意图.....	69
图 4.5	在表 4.1 中的参数下, 剖面的演化情况.....	72
图 4.6	剖面演化在时间上的切片.....	73

图 4.7	平衡边界温度梯度驱动的不同方式。方式 I: 当地温度梯度的增长, 或者方式 II: Ω_Z 的湍流共振耗散	74
图 4.8	II-区中的详细反馈过程。①边界值 $\partial_x \ln\langle T \rangle _{B.C.}$ 大于局域值, 从而驱动 Ω_Z 朝着正值的方向增长 (边界值为正)。如果 $\Omega_Z > \Omega_D$, 共振输运 χ^r 触发, ②流的耗散和 ③局域温度剖面的耗散都被增强。④局域温度梯度变得平坦, 同时反馈到 Ω_Z 的演化中。由于局域温度梯度变弱, 所以边界温度梯度的驱动效应变得更强。⑤而 Ω_Z 的湍流输运由于已在第 ②步得到了增强, 所以恰好可以平衡这一变强的边界驱动	75
图 4.9	对边界梯度驱动 $\Delta\kappa_T^{crit}$ 的扫描。图中虚线来自对台阶出现阈值的估计 (4.70), 和数值上给出的结果符合的很好。随着 δ_b 的减小, 触发阈值快速地降低, 在相同的 δ_b 下, 净驱动 $\Delta\kappa_T$ 越大, 则台阶数量越多	77
图 4.10	处于共振触发范围的速度 Ω_Z 和平台区的宽度 w_{II} 对应	79
图 4.11	台阶宽度随 δ_b 的变化, 同时比较了不同 $\Delta\Omega_Z$ 和 $\kappa_T^{B.C.}$ 的影响。这里的 $\kappa_T^{B.C.} = \kappa_T^{INI.} + \Delta\kappa_T$ 。(a) 在相同的边界驱动下, 例如 $\Delta\kappa_T = 0.2$, 更高的初始温度梯度将导致更小的台阶宽度, 从而倾向于产生更多台阶。(b) 对一组 $(\delta_b, \kappa_T^{B.C.})$ 参数来说, 当流缓慢地逐渐增长时, $\Delta\Omega_Z$ 也会缓慢地增长, 比如图中从 0.1 到 0.2, 这在剖面中体现为台阶的融合	79
图 4.12	$\partial_x \ln\langle T \rangle$ 的初值可以影响台阶尺寸和台阶数量, 这里 $\Delta\kappa_T = 0.2$, $\delta_b = 0.06$	80
图 4.13	在 χ 模型中引入 κ_T 影响的一个例子	81
表 1.1	沙堆模型和湍流输运模型的类比 ^[49]	15
表 1.2	不同装置中的 Hurst 指数 ^[55]	17
表 2.1	色散中的关系参数	35
表 3.1	模型 (3.26) 和传统模型、Dupree 的两点关联理论 ^[75] 的比较	47
表 4.1	数值计算选择的参数	71

符号和缩略语说明

ρ_i	离子回旋半径
δ_b	捕获离子轨道宽度
a	托卡马克小半径
R	托卡马克大半径
ε_0	托卡马克环径比倒数
ϕ	电势
T_i	离子温度
Ω_D	捕获离子进动速度
Ω_Z	$E \times B$ 环向平均流速
ELM	边界局域模
MHD	磁流体
ITG	离子温度梯度模
ETG	电子温度梯度模
TIM	捕获离子模
TEM	捕获电子模
SOL	刮削层
ETB	边界输运垒
ITB	内部输运垒
RMP	共振磁扰动
SMBI	超声分子束注入
ZF	带状流
GAM	测地声模
DW	漂移波
SOC	自组织临界
BTW	Bak, Tang 和 Wiesenfel 在 1987 发表的文章《Self-Organized Criticality: An Explanation of $1/f$ Noise》
BES	束发射谱诊断
JRS	反射对称性
HW	Hasegawa-Wakatani
PV	势涡
PE	涡量拟能

第1章 引言

对人类社会而言，能源是驱动现代文明运行、发展的基石。从人力为主的原始社会、农耕社会，到以化石能源为主，太阳能、风能、核能为辅的现代社会，了解和掌握新形式的能源都代表了文明的进步。另一方面，文明的发展过程中，面临改造环境、城市扩张、提高生活质量、探索未知领域等问题，从而产生了对能源的无上限的需求。对现代人而言，以电力为代表的能源已成为像空气、食物那样的生活必需品。但是从现实的角度看，能源不是无限的，且各种形式的能源也有不同的获取成本。这里的成本不仅仅指经济上的，也包括开采、排放等带来的环境成本。而随着环保理念的深入人心，人们对低环境影响的清洁能源的渴望也日益强烈，乃至成为部分地区和国家主要关心的政治议题。在形形色色的能源形式中，聚变能源由于燃料储量大、CO₂ 排放量低、废物排放少等优势，常常被描绘为符合大众期待的所谓“终极能源”。

对聚变来说，处于或接近燃烧状态的介质都处在高温等离子体态。约束这样的高温等离子体可以采用的方式主要有两种：惯性约束和磁约束。在数十年的磁约束聚变等离子体研究中，形成了以托卡马克（Tokamak）和仿星器（Stellarator）两种装置为主的研究现状。为了判断实现可控核聚变需要满足的条件，Lawson 提出了等离子体点火（即无需外部加热维持聚变发生）条件^[1]，即 Lawson 判据 $nT\tau_E > 10^{21} \text{m}^{-3} \text{keVs}$ 。其中 n 为等离子体密度， T 为等离子体离子温度， τ_E 是能量约束时间。等离子体中离子和电子的对流扩散等输运过程越强，约束时间越短。

为了解释实验中观察到的输运现象，经过多年的研究，学术界经历了从库仑碰撞输运，到新经典（Neoclassical）输运，再到反常（Anomalous）输运的认识过程。现在普遍的观点是反常输运和湍流有关，例如离子温度梯度模（Ion Temperature Gradient, ITG）、电子温度梯度模（Electron Temperature Gradient, ETG）、捕获电子模（Trapped Electron Mode, TEM）等激发的湍流。虽然已经经过了数十年的研究，但是人们对托卡马克中的电磁湍流的了解还是很有限。主要原因包括：

- 物理尺度跨度大， $\rho_i < l < a$ 。其中 ρ_i 是离子回旋半径，处于微观尺度，大约为 10^{-3}m 量级； a 是装置尺寸，处于宏观尺度，量级为 m
- 实验测量困难、可接近性差
- 数值模拟复杂、计算量大
- 集群模式（Collective Mode）种类繁多
- 存在输运分岔现象、非线性过程等

所以，虽然湍流输运在约束托卡马克等离子体中的重要作用已经受到广泛认可，但是仍有许多尚未解决的问题，一个重要的例子是离子热输运偏离回旋波姆定标率（gyro-Bohm scaling），这一现象意味着托卡马克等离子体湍流中可能存在所谓的介观物理过程（即处在介观尺度的物理现象）。同时，人们现在除了关心约束时间的计算，也十分关注诸如高能量粒子参与的多尺度过程、刮削层（Scrape-off Layer, SOL）与芯部耦合、动量和粒子输运、剖面预测和演化等问题。这些问题都涉及湍流输运，并或多或少与介观尺度物理过程相关。本课题研究的主题是托卡马克中的介观物理过程，特别是湍流自扩散和 $E \times B$ 台阶这两种现象。

1.1 研究背景

1.1.1 回旋波姆定标率的失效

在研究聚变的过程中，人们引入了定标率（Scaling）的概念，用以描述物理量等随参数的变化关系。对漂移波湍流而言，可以用一个简单的混合长度模型估计湍流输运系数的大小，即输运系数 $D \sim v^* l$ ，其中 v^* 为逆磁漂移速度， l 为湍流特征长度^[2]。在托卡马克中， $\rho_i < l < a$ ，于是在 l 取不同值时有：

$$D \sim v^* l \implies \begin{cases} D \sim v^* a \sim \rho_i v_{Ti} \sim D_B, & \text{Bohm scaling} \\ D \sim v^* \rho_i \sim \frac{\rho_i}{a} \rho_i v_{Ti}, & \text{gyro-Bohm scaling, 即 } D \sim \rho_* D_B \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\rho_* = \rho_i/a$ 。当湍流特征长度在微观尺度 ρ_i 上时，输运系数应当遵循回旋玻姆定标率；当湍流特征长度取在宏观尺度 a 时，输运系数应当遵循玻姆定标率。在实际的 L 模实验中测量得到的结果显示湍流特征长度确实为数个 ρ_i ，但是输运系数却遵循 $D \sim \rho_*^\alpha D_B$ ，其中 $\alpha < 1, \sim 0.6 - 0.7$ ，这明显偏离回旋波姆定标率^[3, 4]。偏离回旋波姆定标将会为实现聚变带来更多的困难，具体可见下面的例子。

一个简单的定标模型可以表征聚变功率输出和装置尺寸（小半径 a ）及环向磁场（ B_t ）之间的关系^[5]：

$$\frac{P_{\text{fus}}}{P_{\text{loss}}} \propto B_t^{(7+2\alpha)/3} a^{5(2+\alpha)/6} \quad (1.2)$$

从这个关系可以得出结论，不同的 α 对聚变功率增益有巨大影响。从直观的角度说，遵循不同定标率的装置在实现点火时所需的最小尺寸可以相差近乎一倍，如图 1.1 所示。对聚变堆而言，尺寸相差一倍，可能带来建造成本上数倍到数十倍的差异。幸运的是，在 H 模下，由于边界输运垒（Edge Transport Barrier, ETB）的存在，等离子体输运整体遵循回旋玻姆定标率，但是上述离子热输运对定标率的偏离问题仍未解决。而 H 模本身也存在边界局域模等问题，从而需要发展诸如共

振磁扰动 (Resonant Magnetic Perturbation, RMP) 或超声分子束注入 (Supersonic Molecular Beam Injection, SMBI) 等 ELM 缓解手段。所以在 H 模之上更进一步, 寻找合适的所谓“先进运行模式”是十分必要的。而理解托卡马克中的湍流输运则有助于达成这个目标。

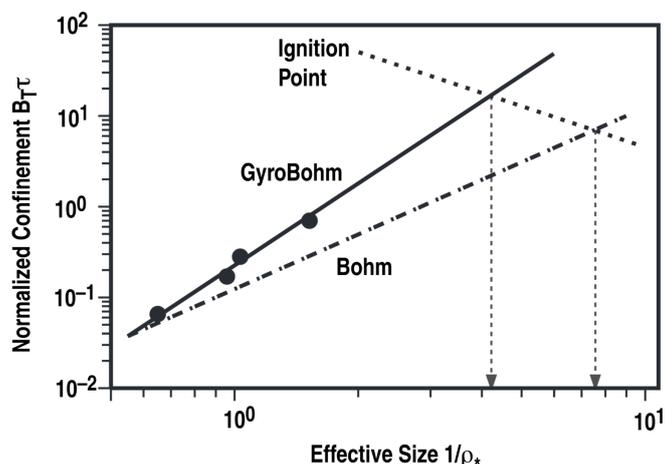


图 1.1 归一化约束时间和相对回旋半径之间存在的 Bohm 和 gyro-Bohm 定标率。数据点来自 DIII-D 和 JET 运行在 ITER-like ELMy H-mode^[5]

回到湍流输运物理的角度, 上面提到的实验结果偏离回旋玻姆定标率背后的物理问题是: 特征长度在数个 ρ_i 的集群扰动是如何导致一个等效大小为 $l_x \sim \rho_i^\alpha a^{1-\alpha}$ 的混合长度的? 注意到这一混合长度处在微观 ρ_i 和宏观 a 之间, 故可以称其为介观尺度 (Mesoscopic Scale)。所以回旋玻姆定标率失效这一现象背后应当伴随着介观尺度的物理过程!

1.1.2 介观物理过程

托卡马克等离子体湍流中的很多现象都可以归类为介观尺度现象, 比如: 湍流自扩散 (Turbulence Spreading)、雪崩输运 (Avalanche)、带状流 (Zonal Flow)、还有最近十年内发现的一种新现象: $E \times B$ 台阶等。

湍流自扩散本质上是湍流的一种自散射 (自扩散) 过程, 即湍流被自身所引起的输运过程作用, 表现为在某处激发的湍流会迁移弥散到另一处。在数学形式上, 多用一个关于湍流强度量或湍流能量的反应-扩散方程描述, 与湍流的 $K - \epsilon$ 模型相似。模型给出的锋面解 (Front, 或 Leading Edge) 可以描述湍流强度包络的传播、弥散等过程。

雪崩输运与自然界的雪崩现象相似, 是多尺度系统的一种本征过程, 而聚变等离子体中天然存在着显著分离的多尺度。雪崩输运表现为在弛豫过程中, 一系列的单元 (Cell) 顺序地释放或转向, 引发很强的瞬时通量。所以雪崩能轻易引起

超过单元尺度，并快速影响系统尺度的输运，通常也会使得概率分布函数具有肥尾。可用一个推广后的 Burgers 方程以及其激波解来描述雪崩输运。

湍流自扩散和雪崩输运是两种不同但又相互作用的现象。两者都来自于湍流激发的非线性径向传播，都会在托卡马克中引入非局域的湍流，从而破坏局域形式的 Fick 定律，即通量和梯度遵循的 $\Gamma = -D\nabla P$ 关系。并且由于在实验中计算输运系数时，常常依赖局域形式的通量梯度关系，所以得到的结果自然受到湍流自扩散或雪崩输运这类会引入非局域湍流的介观现象的影响。

另一个重要的介观物理过程是自组织漂移波产生的带状流 (Zonal Flow, ZF)，即平均极向对称的条带状 $E \times B$ 剪切流。带状流本身是自然界和实验室中广泛存在的一种现象。在自然现象中，最广为人知的例子就是木星大气中的环带状结构。在实验室中， $E \times B$ 剪切流和带状流在提高等离子体约束等方面的重要作用已是广泛共识。带状流也已成为了托卡马克等离子体漂移波 (Drift Wave, DW) 湍流研究中的基本组成，并且形成了可称为“DW-ZF 湍流”的研究范式^[6]。带状流的研究极大地推动了可控聚变的发展，同时也加深了人们对自然界中的自组织过程的理解。

随着近年来数值模拟和测量手段的发展，人们又发现了托卡马克中另一种介观物理过程： $E \times B$ 台阶。在 $E \times B$ 台阶中，既存在类雪崩输运的区域，其对应的压强剖面较为平缓；也存在所谓的带状流或 $E \times B$ 剪切层阵列 (Array) 区，其对应的输运较弱，压强剖面较为陡峭。这两种区域在空间上交替出现，从而使得温度、密度或压强剖面呈现类似台阶的准周期模式 (Quasi-periodic Pattern)。理论上来说，湍流也可以通过自扩散浸润或穿透 $E \times B$ 剪切层形成的微输运垒从而在台阶中发挥作用。归结起来可以说， $E \times B$ 台阶是湍流自扩散、雪崩输运、 $E \times B$ 剪切流三种介观物理过程相互作用、竞争共存的一种实现 (Realization)!

在 $E \times B$ 台阶这一现象中，既存在类雪崩输运，也包含了 $E \times B$ 剪切层列，两者交替出现，系统呈现出有趣的自组织行为和多解性。台阶现象可以启发一系列的问题，比如：

- 被一系列微输运垒分隔的湍流活跃区宽度大概在数十个离子回旋半径^[7]，从而自然地给出了一个介观尺度的混合长度。这与回旋玻姆定标率的失效是否存在联系？
- 在部分模拟中还可以看到 $E \times B$ 台阶的融合现象^[8]，由此引申出：是否可以通过一系列台阶融合形成内部输运垒 (Internal Transport Barrier, ITB)？
- 在部分实验中观察到多级输运垒似乎比单级输运垒的约束效果好^[9, 10]，那么 $E \times B$ 台阶能否成为一种可行的新运行模式？

可以看到这些问题对解决聚变等离子体研究中存在的一些困难给出了很多启

发性的思考。但是要真正回答上面的问题，就必须深入理解 $E \times B$ 台阶形成的物理机制，其中最关键的是理解台阶尺度的涌现机制！但是到目前为止，无论是模拟上的结果^[11]，还是各个装置实验上的初步测量，如 ToreSupra^[7]、DIII-D^[9]、KSTAR^[12]、HL-2A^[13]等，都没有显示出剪切层的位置和有理面有直接关联，台阶形成机制仍然是一个尚待解决的问题。

1.2 国内外研究现状

本节将对国内外近年来关于托卡马克中介观物理过程的研究做一个简要的回顾，其中特别关注的两个过程是湍流自扩散和 $E \times B$ 台阶。除了实验和模拟结果外，我们会更关注理论方面的研究现状。

1.2.1 湍流自扩散

现如今，大部分的磁约束聚变研究中对湍流的认识仍然建立在一个局域模型的概念上——局域梯度作为线性增长的“源”为湍流注入能量，直至达到非线性饱和——所以没有脱离一般性的 Fick 定律的描述。然而实验上却观测到弱梯度线性稳定区却有着远超预期的等离子体输运水平^[14]，或者在弱梯度的 SOL 区有着强湍流^[15]。这类现象意味着湍流可能侵入或浸润（Penetration）到线性稳定或弱不稳定的区域内，从而带来非局域的湍流，出现局域模型无法解释的现象，即所谓的湍流自扩散（Turbulence Spreading）现象。本节下面对湍流自扩散现象在理论、模拟、实验方面的研究现状做一个回顾。

从理论的角度说，湍流自扩散过程一般用一个关于湍流强度的反应-扩散方程描述。最初，为了研究模拟中观察到的定标率问题，T. S. Hahm 和 P. H. Diamond 引入了下面的湍流强度方程^[16]：

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \chi(I) \frac{\partial I}{\partial x} + \gamma(x)I - \alpha I^{1+\beta} \quad (1.3)$$

其中包含了湍流自扩散问题中最基本的三个因素，即方程中等号右侧依次的是：非线性输运、线性增长、非线性饱和。这个模型和 $K-\epsilon$ 模型具有相似性^[17, 18]。式(1.3)右边第一项代表了非线性自散射项，其中的输运系数同湍流强度相关 $\chi(I) \sim \chi_0 I^\beta$ 。在弱湍流近似下有 $\beta = 1$ ，强湍流中则可以取 $\beta = 1/2$ 。 α 是非线性耦合系数。 χ_0 和 α 也可以是空间位置的函数。在这个模型中，若 $\beta = 1$ ，可以得到湍流的饱和水平为 $I(x) \simeq (\gamma(x)/\alpha)^{1/\beta}$ ，该结果符合混合长度理论给出的估计。非线性输运项可以从对 $E \times B$ 非线性的多尺度闭包给出^[19]。简单来说，就是可以对模式尺度 \mathbf{k} 和包络

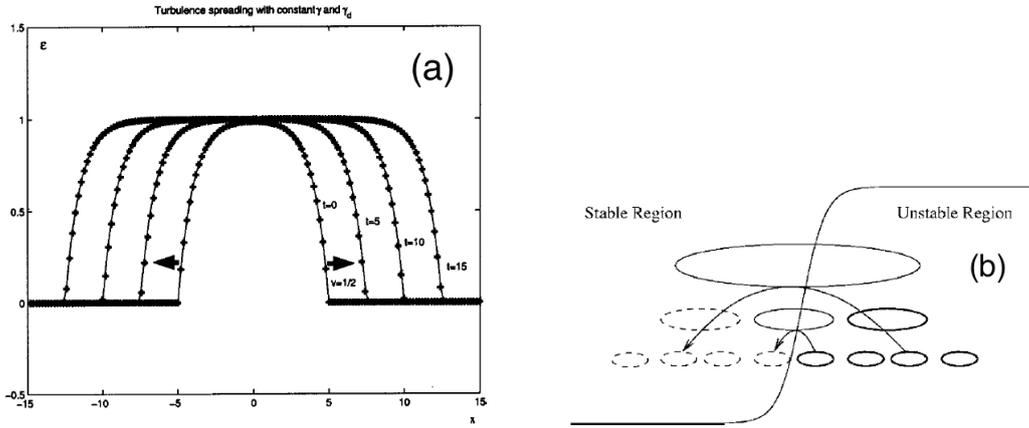


图 1.2 (a) 图中, 在线性不稳定区内, 湍流通过一个稳定的波前传播^[20]。(b) 图给出一种湍流自扩散的机制, 即逆向级联产生大的对流单元, 从而有效地输运小尺度湍流和内能^[21]

尺度分开处理, 假设 $\nabla \rightarrow i\mathbf{k} + \partial_x$ 。于是可以将非线性项做如下转化:

$$\sum_{\mathbf{k}'} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \times \mathbf{b})^2 R_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} I_{\mathbf{k}'} I_{\mathbf{k}} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial}{\partial x} I_{\mathbf{k}} + k_{\perp}^2 D_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}}$$

其中 $R_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ 是决定相关时间的响应函数, $D_x = \sum_{\mathbf{k}'} R_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} |\delta v_{E, \mathbf{k}'}|^2$, $D_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}'} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \times \mathbf{b})^2 R_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} |\delta v_{E, \mathbf{k}'}|^2$ 。基于该模型, 在设定增长项 $\gamma(x)$ 在空间中的分布和其他参数后, 可以研究湍流强度 I 的演化, 比如图 1.2 左图中湍流以一个稳定波前 (Front) 的形式在一个恒定的线性增长区中传播。

方程 (1.3) 因其形式简单而被广泛应用和拓展, 但是本质上还是一个唯象模型。虽然可以从 Fokker-Planck 类型的分析给出其形式, 但是要求扩散的概率分布函数的二阶矩是有限值^[20], 这一条件在 $P(\Delta x)$ 满足幂律分布时可能不满足。另外, 对模型 (1.3) 本身有两方面的思考:

1. 方程 (1.3) 是从唯象的角度提出的一个单场反应-扩散模型, 那么是否可以从统计闭包的角度给出一个湍流自扩散的系统化的理论?
2. 带状流在湍流自扩散中起到了什么作用?

Grücan 等在 [21] 中对第一个问题给出肯定的答案。他们在 Hasegawa-Wakatani 的框架下, 讨论了非线性波耦合以及实空间中湍流的扩散, 经过闭包处理等方法给出了如下的模型:

$$\frac{\partial}{\partial t} K + v_{gx} \frac{\partial}{\partial x} K - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 K \frac{\partial}{\partial x} K \right) = \gamma(\beta N + (1 - \beta)K) - \gamma_{NL} K^2 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N + v_{gx} \frac{\partial}{\partial x} N - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_2 N \frac{\partial}{\partial x} N \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_3 K \frac{\partial}{\partial x} N \right) = \gamma(\beta K + (1 - \beta)N) - \gamma_{NL} N^2 \quad (1.5)$$

在这个模型中, 扰动能量分为动能和内能。总的来说, 动能倾向于传输到大尺度,

如同二维湍流中的逆向级联 (Inverse Cascade); 而内能则散射到小尺度, 即正向级联 (Forward Cascade)。于是通过逆向级联产生的大尺度对流单元可以有效地扩散湍流, 特别是对内能的扩散, 如图 1.2 右图所示。基于上述能量分割, 方程也转化为分别关于动能 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 和内能 $\langle (\tilde{n}/n_0)^2 \rangle$ 的两个反应-扩散方程。这一方程可以在一定条件下回归到前述的单场方程 (1.3)。该模型对第二个问题也给出了启发性的回答, 即湍流自扩散中带状流阻尼可能是重要但不主要的效应。另外, 因为 GAM 本身可以独立传播, 所以湍流-测地声模 (Geodesic Acoustic Mode, GAM) 在湍流散射上的效率如何也是一个未来值得关注的问题^[22]。要进一步回答带状流和湍流自扩散的相互作用问题, 可能需要将更多的剖面演化过程纳入系统, 这便和后文中的 $E \times B$ 台阶问题联系起来。

基于模型 (1.3), 人们从理论角度还提出了许多拓展, 比如加入 $v_{gx} \partial I / \partial x$ 群速度项来近似环效应带来的邻近极向共振^[20], 数值上也显示出环向耦合可以导致扰动波前的弹道式传播^[15], 或者引入扰动密度等建立多场模型^[23, 24], 然后应用在了和 ITB 相互作用^[25]、密度剖面褶皱^[26]等研究中。

对实验和模拟来说, 湍流自扩散的重要性首先体现在对装置的约束定标的影响上。正如论文在研究背景中提到的, 当今大多数托卡马克装置呈现出趋近于 Bohm 而不是 gyro-Bohm 的离子热输运定标率。实验观察到的湍流涡旋尺度大概在几个离子回旋半径^[27, 28] $l_{eddy} \propto \rho_i$, 那么从混合长度分析给出的输运系数应当是 gyro-Bohm 量级的。这和实验上观测到的 Bohm 定标之间存在着明显差异^[15, 27, 29]。为了解释这些现象, 人们开始逐渐关注湍流自扩散对输运系数的影响, 但是由于实验测量上的困难, 所以现有研究多以数值模拟为主。

在早期的 GTC 模拟中发现扰动强度剖面和离子热扩散系数呈正相关, 而且随着装置尺寸的增大, 输运系数似乎出现了从所谓的“Bohm”定标转变为“gyro-Bohm”定标的现象^[30], 如图 1.3 左所示。人们认为造成这一现象的原因是湍流自扩散, 并基于方程 (1.3) 估计了装置尺寸变化对输运系数的影响如下^[4, 30]:

$$\chi_i = \frac{\chi_{i0}}{1 + \Delta x / W} \quad (1.6)$$

其中, χ_{i0} 是没有湍流自扩散时的离子热扩散系数, 遵循回旋玻姆定标率, Δx 是湍流浸润到稳定区的深度, W 是不稳定区的半宽度, 与 gyro-Bohm 的偏离由 $\Delta x / W$ 表征。表达式 (1.6) 显示, 当装置尺寸或不稳定区宽度 W 增大时输运系数将会逐渐回归到 χ_{i0} 。要验证这一理论, 最重要的是给出湍流浸润稳定区的深度 Δx 。在固定 $W/a = 0.25$ 后, 令 $(\rho_*)^{-1} = a/\rho_i$ 的值从 125 到 500 变化, 发现有 $\Delta x \simeq 25\rho_i$, 于是得到了湍流穿透深度的大小为 $\Delta x / W \simeq 100\rho_*$ 。基于此, 公式 (1.6) 可以同图 1.3 中观察到的从 Bohm 到 gyro-Bohm 转换吻合。不过在其他模拟中^[31, 32], 对 W/a 和 ρ_*

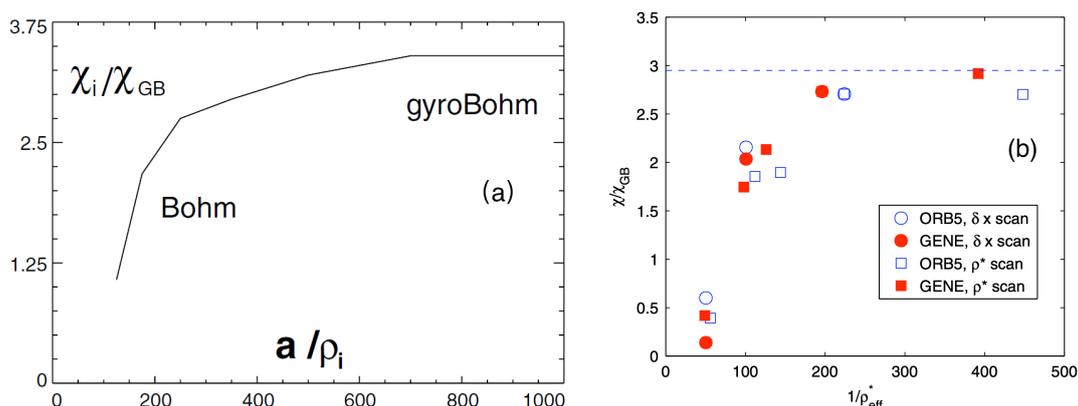


图 1.3 (a) 图离子热输运系数随装置小半径变化，遵循从“Bohm”到“gyro-Bohm”定标的变化关系^[4]；(b) 图采用 $\rho_{*,eff} = \rho_*/2W$ 表征系统尺寸，并比较了不同回旋动理学程序的结果^[31]

扫描后显示，或许 $\rho_{*,eff} = \rho_*/2W$ ，而不是 ρ_* 才是合适的用于描述偏离 gyro-Bohm 的无量纲数，如图 1.3 右所示。实际上，如果这里湍流自扩散的图像成立的话，那么湍流强度以及输运系数其实一直都是遵循 gyro-Bohm 定标率的，图 1.3 中标注的所谓的“Bohm”区反而会带来一些理解上的困难。但是总的来说，湍流自扩散可以引起湍流强度和输运系数的出现如图 1.3 中随装置尺寸的变化是已被广泛接受的结果，只是在具体参数大小等问题上还有一些争议。

值得一提的是，[33]中指出可以通过一个简单的非局域关系解释回旋动理学模拟中广泛观察到的图 1.3 这种现象。因为通常在模拟中使用的增长率区间都较为陡峭，有明确的增长区间，所以他们提出只需要假设在模拟中真正发挥作用的是一个非局域的线性增长率：

$$\gamma_{\text{nonloc}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'/(2L) \exp[-|x - x'|/L] \gamma(x') \quad (1.7)$$

湍流自扩散受到了非局域效应的增强，而模拟中观察到湍流强度便和该非局域增长成正比。正如式 (1.7) 所示，该非局域增长是局域增长率 $\gamma(x)$ 与一个指数衰减的非局域核卷积平均后的结果。当然这个模型的问题在于，如何确定这里的非局域性宽度 L 。在 [33] 中仅仅做了一些启发性 (Heuristic) 的分析，没有真正给出这里非局域性的物理来源。并且由于这样的非局域效应并不强烈，当时也并不确定这样的非局域性是否存在，我们也没有看到有任何研究跟进这一问题。而在本论文的第 3 章中将会给出这个问题的答案：即托卡马克中存在一个内秉非局域性 (Intrinsic Nonlocality)，其大小为香蕉轨道宽度，并且我们从理论上给出的非局域性形式与式 (1.7) 相同！

从实际运行的角度看，除了定标率问题外，磁剪切 $\hat{s} = d \ln q / d \ln r$ 和安全因

子 q 对湍流自扩散的影响也是值得研究的问题。回旋动力学代码 **gKPSP** 中给出的结果是湍流自扩散受到磁剪切的强烈影响，而安全因子本身的影响并不大^[34]，同时结果也暗示了在准确描述托卡马克中等离子体输运时非局域机制是必不可少的，如图 1.4 所示。环向流剪切对湍流自扩散的抑制作用也只在低磁剪切的情况下效果明显^[35]。

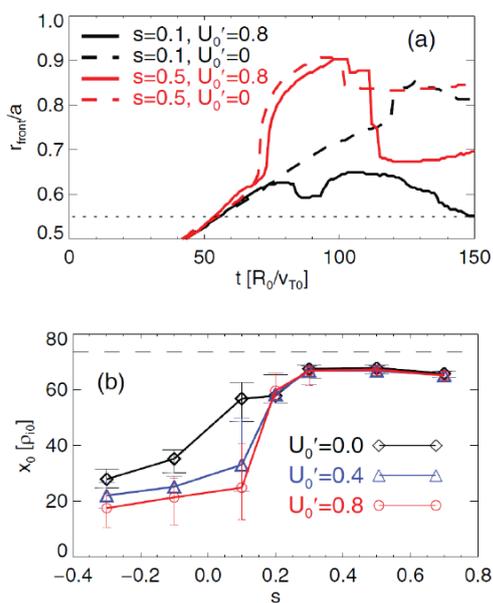


图 1.4 不同磁剪切下的 (a) 湍流波前位置 (b) 浸润深度。安全因子对湍流自扩散的抑制只在低磁剪切下效果明显^[34]

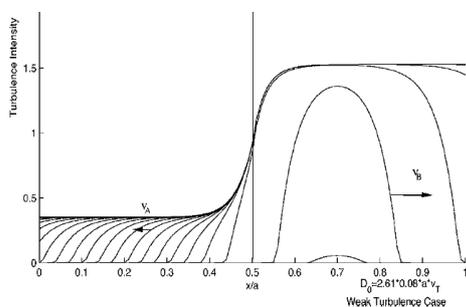


图 1.5 方程 (1.3) 随时间的演化，参数与图 1.6 中 GTC 模拟参数相似^[36]

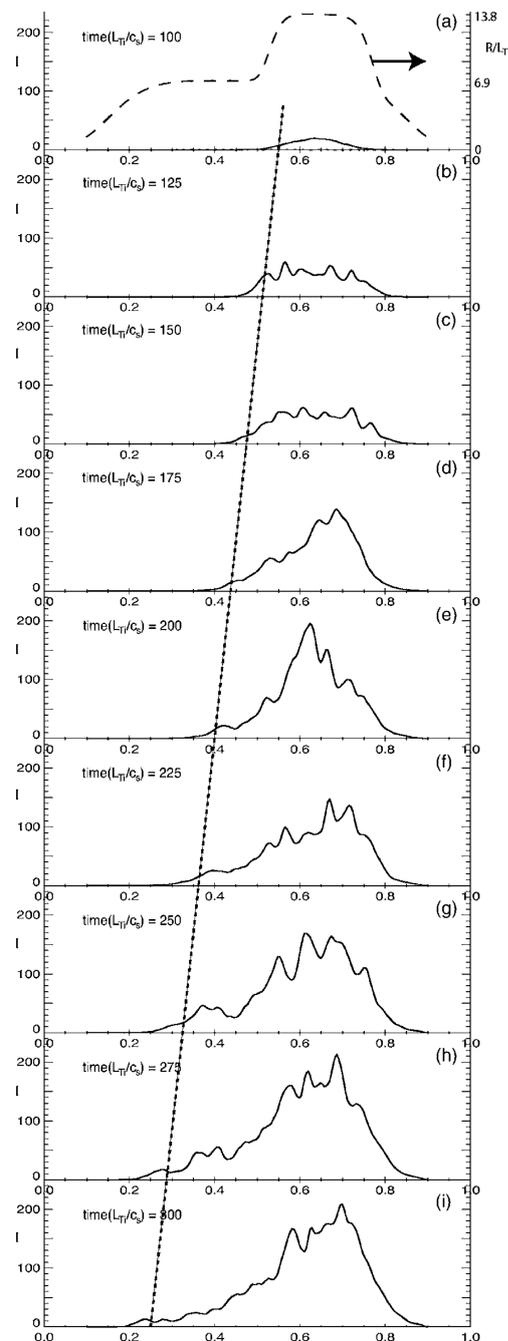


图 1.6 GTC 模拟中湍流强度随时间的演化^[36]

湍流自扩散在芯部边界耦合问题中也起到了重要作用。通常来说，在聚变研

究中会将托卡马克分为三个区域：中心锯齿区，中部约束区或芯部区，以及一个边缘或台基区，其中台基区是芯部运输的边界。但是湍流自扩散可能使得 L 模中边缘区的强湍流进入到芯部的弱湍流区，从而模糊了边界和芯部的区分，也就是说或许芯部和边界的定义在 L 模下并不完备。而这也同 L → H 转换过程中芯部湍流减少这一关键特征联系起来。基于 GTC 模拟的研究给出了从边缘向芯部的湍流自扩散过程^[36]，如图 1.6 所示。图 1.5 则是模型 (1.3) 在与图 1.6 中 GTC 模拟相同参数下给出的结果，从而证明了模型 (1.3) 给出的图像是有效的。湍流自扩散在运输垒存在时，可能使得湍流穿过该运输的垒^[20]。在 [37] 中用 GTS 代码对该过程进行了研究，如图 1.7 所示，其中的强径向电场剪切区为运输垒。

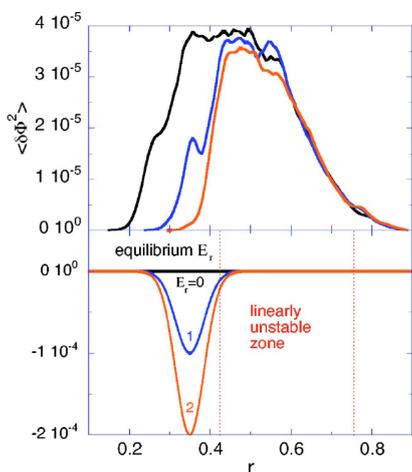


图 1.7 GTS 模拟给出湍流在径向上可以穿过不同大小的径向电场剪切形成的运输垒^[37]

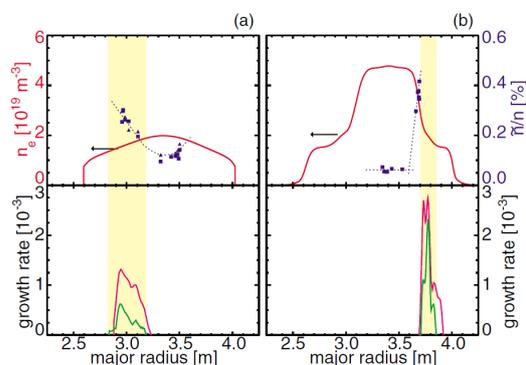


图 1.8 在靶等离子体 (a) 和 ITB 等离子体 (b) 中测量的红外密度扰动 (蓝) 和等离子体密度剖面 (红)。第二行为 FULL 代码计算的线性增长率^[38]

关于湍流自扩散的模拟证据有很多，但是仍然需要相关的实验证据支持。在 JT-60U 的线性稳定区中观测到非零的扰动和反常运输^[38]，如图 1.8 所示。这意味着其中可能发生了湍流自扩散，但是更直接的证据还需要看到扰动从不稳定区到稳定区传播的时空演化。这样的测量非常有挑战性，因为在稳态，实验中测量到的总是一个受到多种机制共同作用的结果，其中包括局域非线性饱和及非局域效应等。一种解决方法是研究运输垒刚刚建立或崩塌瞬间之后的等离子体。比如使用束发射谱 (Beam Emission Spectrum, BES) 诊断观察芯部在 H 模转换和边界运输垒形成之前、之中和之后的密度扰动强度^[39]，如图 1.9 所示。芯部的湍流扰动强度在 H 模转换之后迅速降低，而这并不能由局域稳定性理论或模型去解释。在 TJ-II 中，通过在不同位置观测径向电场和密度扰动在 H → L 转换中的变化发现：在 H 模下，湍流在 $E \times B$ 剪切层外强，剪切层在 H → L 转换之前减小，而芯部湍流则以相近的时间尺度增加^[40]，如图 1.10。这些结果通过观测湍流强度变化，证明了湍流自扩散在 H → L 转换过程，以及前面提到的边界-芯部耦合中发挥了重要作用。

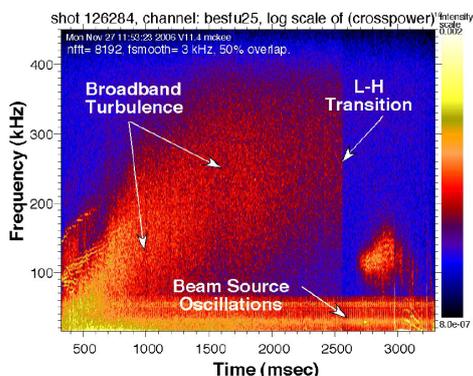


图 1.9 在 $r/a = 0.65$ 处用 BES 观察密度扰动随时间变化^[39]

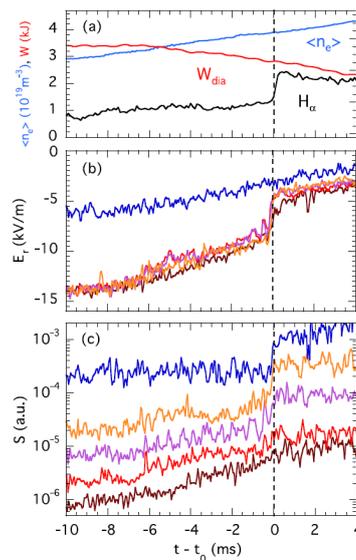


图 1.10 (a) 线平均密度和 H_α 信号随时间的演化, (b) E_r 和 (c) 密度扰动在相对 E_r 剪切不同位置时随时间的演化^[40]

另一种实验上直接研究湍流自扩散的方法是研究磁岛和湍流的相互作用。磁岛内部的剖面十分平坦,从而形成了一个可以被明确区分的稳定区和不稳定区。于是磁岛成为了一个很好的观察湍流自扩散过程的对象。在 HL-2A 中观察到磁岛中出现了高于噪声水平的扰动功率,而由于磁岛内剖面平坦,湍流的局域驱动是可忽略的,所以应当是湍流经由自扩散进入了磁岛^[41],如图 1.11 所示。利用 ECEI 等测量手段,在 KSTAR 中可以直观地看到湍流自扩散穿过磁岛的过程^[42],如图 1.12 所示。

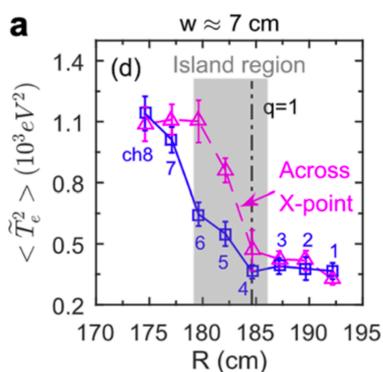


图 1.11 磁岛中穿过 X-点 (粉色) 和 O-点 (蓝色) 的温度扰动功率剖面^[41]

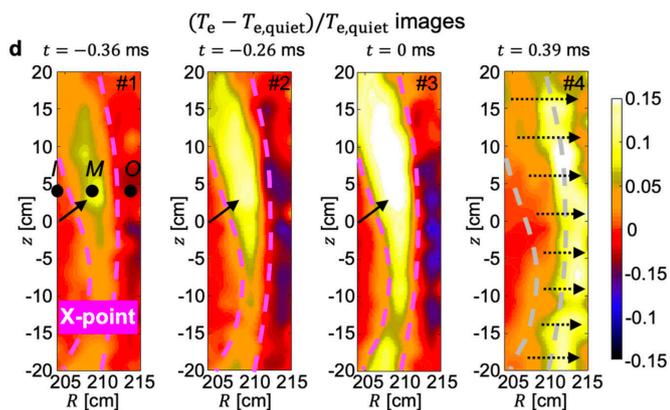


图 1.12 磁岛附近单次湍流自扩散事件中电子温度 T_e 的相对变化^[42]

1.2.2 雪崩输运

因为雪崩输运和自组织临界现象存在着深刻联系，所以在回顾雪崩输运 (Avalanche) 的研究之前，有必要先解释自组织临界 (Self-Organized Criticality, SOC) 的概念。自组织临界描述的系统一般包含显著分离的尺度：基本单元尺度 Δ 和系统尺度 L ，而 $\Delta/L \ll 1$ ，在聚变等离子体中，对应于 $\rho_* \ll 1$ 。SOC 系统通过输运事件或雪崩输运驰豫，过程中一系列单元顺序地释放或转向，引发瞬时通量。这种集体转向可以理解作为一种扰动 (Fluctuation)，于是雪崩输运可以用一种集群扰动模式表示。从构造的角度来说，SOC 中的驱动源是缓变的，而雪崩阈值则是由相互作用主导。例如一个雪堆，雪花缓慢堆积，整个剖面中某一点超过了临界阈值从该点开始引发雪崩。唯象地说，SOC 是一个存在自相似性 (服从幂率分布) 同时没有被调制的系统。幂率分布除了表征自相似性之外，还表明了中间尺度 $\Delta < l < L$ 的缺失。SOC 同 Zipf 定律存在内在联系，即尺度为 Δ 的事件发生的概率为 $P(E) \sim 1/\Delta(E)$ 。SOC 的另外一个特征是具有谱密度为 $1/f$ 的噪声^[43]。

有关自组织临界的研究有两条路径，一条是源于水利学中表征时间序列的需求，以 Hurst 为代表；一条是对可乘事件、非高斯分布的研究，如对数正态分布、Pareto-Levy 分布的研究。两条路径的研究对象都是存在出间歇性、有分形性质、有自相似性的系统。Hurst 在 [44] 中为了表征强非高斯分布现象 (比如罕见的大洪水 (Noah Event) 和长期的湿润期或干旱期 (Joseph Effect)) 提出了一种利用自相似模型分析时序事件的一般性方法：定义一个 Hurst 指数，其为时间序列 $B(t)$ 在时间间隔 T 上的方差的期望值，

$$E\{[B_H(t+T) - B_H(t)]^2\} = T^{2H} \quad (1.8)$$

当 $H = 1/2$ 时，代表着我们熟悉的随机行走 (Random Walk)，即布朗运动，并且当

1. $1/2 < H < 1$ ，系统保有一个持续的记忆，时间上呈现正相关，表现为长时间持续的现象；
2. $0 < H < 1/2$ ，系统在高低值之间迅速地切换，时间上呈现反相关。

Hurst 指数也可以用来表征动力学过程的记忆效应^[45]，如图 1.13。在实际问题中，可以使用 R/S 分析给出 Hurst 指数，其中 R 是相较于标准偏差 S 的累计偏差。值得一提的是，Hurst 指数同时和时间序列的分形维度 D 有关， $1 < D < 2$ 并且 $D = 2 - H$ 。 H 和变量频率谱也有关系

$$\langle (\Delta B)^2 \rangle_\omega \sim \omega^{-\alpha} \quad (1.9)$$

其中， $\alpha = 2H - 1$ 。所以，如果 $H = 1/2$ ，将会得到一个白噪声谱，而 $H = 1$ 给出一个 $1/f$ 的噪声谱。

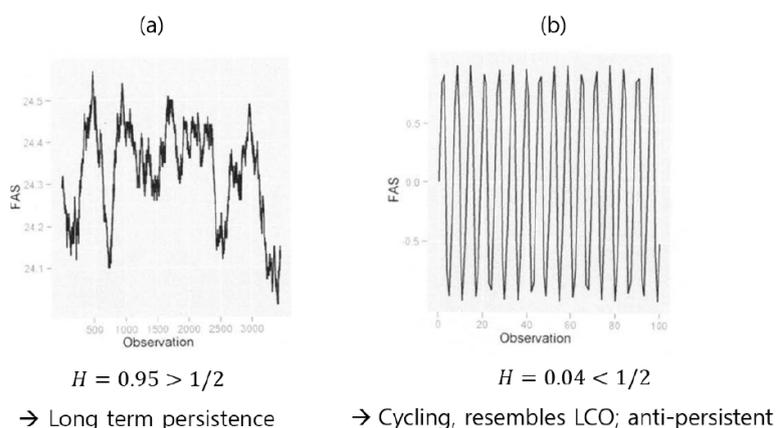


图 1.13 Hurst 指数测量的是系统的记忆^[45]

另一条 SOC 研究线路起源于间歇性 (Intermittency) 与倍乘过程 (Multiplicative Process) 的联系。我们知道, 可加过程遵循中心极限定理并导致高斯统计, 可以用 Fokker-Planck 理论描述。但是对类似如下的倍乘过程

$$X = \prod_{i=1}^N x_i, \quad x = 0 \text{ or } 2, \text{ each with probability } p = 1/2 \quad (1.10)$$

则可用对数正态分布描述:

$$\log X = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_N \quad (1.11)$$

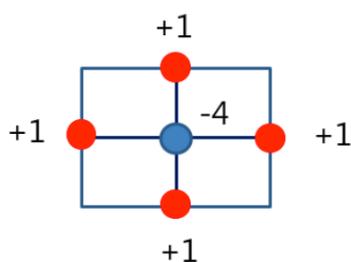
$$F(\log X) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp \left[-\frac{(\log X - \overline{\log X})^2}{2\sigma^2} \right] \quad (1.12)$$

在其他条件下也可能导出其他符合可加性原理的分布函数, 这类分布函数统称为 Lévy 分布函数^[46]。对数正态分布、Zipf 定律 (尺寸为 Δ 的事件发生的概率为 $1/\Delta$) 和 $1/f$ 噪声都是互相关联的, 并最终和自组织临界现象关联。

在 1987 年, Bak, Tang 和 Wiesenfel (BTW) 研究 $1/f$ 噪声建立的模型中^[47], 仅仅利用了非常简洁的抽象, 但是却得出了一些十分深刻而有影响力结论:

1. 在统计系综的意义上, 集群激发或雪崩是 SOC 的一种内秉 (Intrinsic) 过程;
2. SOC 的演化是“几近”于稳定的;
3. 动力学最小稳定和空间尺度的结合导致了扰动在时间上的幂率分布;
4. 噪声通过“多米诺”效应在簇 (Cluster) 中传播, 扰乱了最小稳定状态, 表现为雪崩在时空上的传播;
5. 从远离平衡到一个吸引子是研究这个动力学系统的关键

在 BTW 中使用了二维元胞自动机 (Cellular Automata), 设定的运行条件非常简单, 如图 1.14。简单来说就是当格点上的值超过临界值后向相邻四个格点扩散。在随机设定初始值后, 系统演化后最终达到一个稳定的状态。然后在某一格点施加一



$Z \equiv \text{occupation}$

$Z > Z_{crit} = K$

$Z(x, y) \rightarrow Z(x, y) - 4$

$Z(x \pm 1, y) \rightarrow Z(x \pm 1, y) + 1$

$Z(x, y \pm 1) \rightarrow Z(x, y \pm 1) + 1$

图 1.14 BTW 中设定的元胞自动机规则^[47]

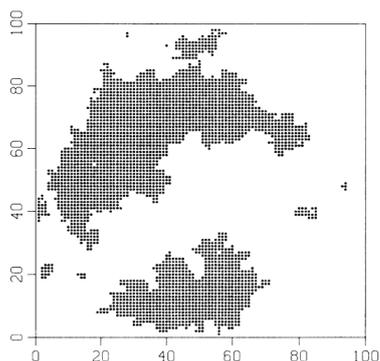


图 1.15 自组织临界态中受到扰动（比如黑色块区围绕的白色点）后出现的最小稳定簇（黑色区域）^[47]

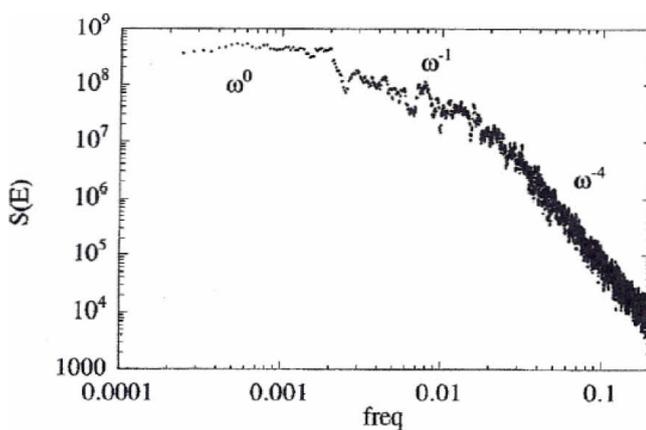


图 1.16 沙堆模型功率谱^[48]

个微小扰动后，将会发生一系列的雪崩过程影响或大或小一定范围内的格点，将受到影响的格点称为自组织簇（Self-organized Cluster），如图 1.15 中黑色部分所示。对不同初值、不同扰动得到的簇大小做统计后发现其遵循 $1/L$ 的规律，进而在很高的精度上重现了 Zipf 定律。

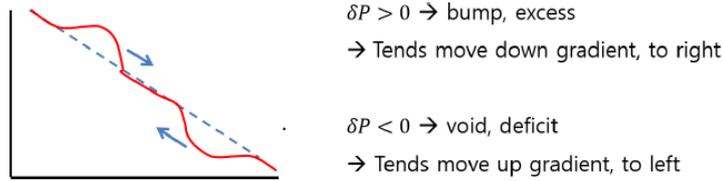
受到 BTW 启发，Leo Kadanoff 等人在 1989 年提出了经典的沙堆元胞自动机（简称沙堆模型）。其基本思想是，元胞数量 $N \sim L/\Delta$ 远远大于 1，这里的 L 是系统尺寸， Δ 是元胞尺寸；在边界上，一侧是闭合边界（两侧元胞相等），另一侧则是损失边界（元胞值为 0）。沙堆元胞自动机与托卡马克中等离子体可以在许多方面建立类比关系，如表 1.1 所示。计算沙堆模型的功率谱 $S(\omega)$ ，给出的结果如图 1.16。可以看到谱在结构上可以分为三个部分：

- $S(\omega) \sim \omega^{(0)}$ ，代表影响系统全局的大尺度事件；
- $S(\omega) \sim 1/\omega$ ，代表发生的事件具有自相似性，是重叠和互相作用的雪崩事件；
- 小尺度，无重叠的雪崩相互作用。

为了能更好地描述等离子体中的湍流，需要从上述的元胞自动机模型转换到流体模型。这类流体模型首先是由 Hwa 和 Kardar 提出^[51]，之后进一步被 Diamond 和 Hahm 发展^[50]应用于等离子体。模型讨论的是一个超出 SOC 剖面的局域参量

表 1.1 沙堆模型和湍流运输模型的类比^[49]

环位形等离子体中的湍流运输	沙堆模型
局域扰动（涡旋）	格点（元胞）
局域湍流机制：局域不稳定性的临界梯度	自动机规则：临界沙堆梯度（ Z_{crit} ）
局域涡旋导致的运输	不稳定时颗粒（Grain）移动（ N_f ）
能量或粒子总量	颗粒的总数（总质量）
加热噪声或背景扰动	随机散布颗粒
能量或粒子通量	沙的通量
平均温度或密度剖面	沙堆的平均斜率
运输事件	雪崩
剪切电场	剪切流（风）


 图 1.17 Bump 沿梯度向下移动，Void 向上移动，从而满足反射对称性^[50]

$\delta P = P - P_{SOC}$ ，这个量可以是正或负，是温度或密度等，如图 1.17。如果动力学过程是守恒的，则参量将满足

$$\partial_t \delta P + \partial_x \Gamma(\delta P) - D_0 \partial_x^2 \delta P = \tilde{S} \quad (1.13)$$

其中包含了背景扩散和源项，待定的通量 $\Gamma(\delta P)$ 可以通过反射对称性（Joint Reflection Symmetry, JRS）给出。反射对称性的主要依据是，一个鼓包（Bump）具有性质 $\delta P > 0$ ，那么它应当朝梯度方向移动；而空穴（Void）满足 $\delta P < 0$ ，应当逆梯度方向移动。这等效于要求做变换： $x \rightarrow -x$ ， $\delta P \rightarrow -\delta P$ 时，通量的形式不变。根据这些条件，可以将 $\Gamma(\delta P)$ 展开为

$$\Gamma(\delta P) = \sum_{m,n,q,r,\alpha} [A_n (\delta P)^n + B_m (\partial_x \delta P)^m + D_\alpha (\partial_x^2 \delta P)^\alpha + C_{q,r} (\delta P)^q (\partial_x \delta P)^r + \dots] \quad (1.14)$$

上式的一个最基本最简单的形式为

$$\Gamma(\delta P) = \alpha \delta P^2 - D \partial_x \delta P \quad (1.15)$$

于是，将上面的通量代入 (1.13) 可以得到：

$$\partial_t \delta p + \partial_x (\alpha \delta P^2 - D \partial_x \delta P) = \tilde{S} \quad (1.16)$$

这是一个包含噪声的 Burgers 方程。在没有噪声的时候，这个方程存在激波解，在这个模型里雪崩过程对应于一个激波的传播。这个模型可以被拓展到高维情形，还可以包含时间延迟效应^[52, 53]，在后面的 $E \times B$ 台阶形成理论的回顾中会进一步展开这一点。

现如今，在磁约束聚变等离子体中，对 SOC 和雪崩运输的研究主要集中在三个方面：剪切沙堆模型、数值模拟雪崩、在 L 模中寻找 Hurst 指数。剪切沙堆模型以及其拓展被广泛应用在诸如边界局域模（ELM）的缓解这些问题中^[54]。由于简化的流体模型已经可以得到基本的雪崩运输物理性质，人们的研究重心已经逐渐转移到回旋动理学模拟上^[43]。最后，在实验测量上，可以观察到不同装置中 L 模等离子体中的 Hurst 指数^[55]都趋近于 0.7，如表 1.2 所示；最近在 KSTAR 的实验中也观察到了反射对称性（JRS）存在的证据^[12]，如图 1.18 所示。

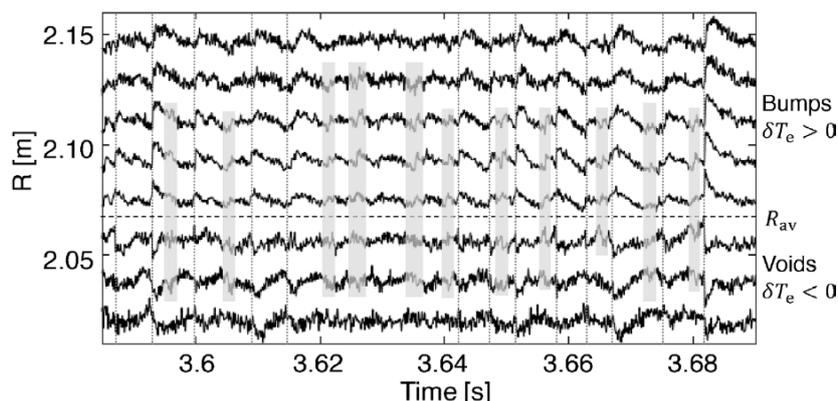


图 1.18 归一化的温度扰动在不同径向位置的测量，灰色方框内为小的雪崩运输事件^[12]

1.2.3 $E \times B$ 台阶

在前两节中介绍了湍流自扩散和雪崩这两种运输过程的研究现状。简单来说，它们都会引入非局域的湍流，使得湍流运输增强。同时，如论文在研究背景中提到的，带状流已成为漂移波湍流研究的基本组成部分，并且形成了研究托卡马克湍流的所谓 DW-ZF 范式。带状流（条带状的 $E \times B$ 剪切流）从湍流中分走能量，一般来说会减弱湍流，从而减弱湍流运输。这两类效果不同的介观物理过程都是由湍流带来的，从而产生了一个问题：带状流和湍流自扩散、雪崩运输之间是如何相互作用的？进一步来说，它们之间的相互作用会产生什么现象？近年来，随着数值模拟和实验探测手段的发展进步而发现的 $E \times B$ 台阶现象便是这个问题的一种答

表 1.2 不同装置中的 Hurst 指数^[55]

Device	Number of time series	$\langle H \rangle_{in}$	$\langle H \rangle_{out}$	$\tau_D(\mu s)$	Self-similarity range (ms)
TJ-I	9	0.64 ± 0.03	0.70 ± 0.04	3.0	0.02-1.0
JET limiter	4	...	0.52 ± 0.04	29.0	0.1-2.0
JET divertor	4	...	0.63 ± 0.03	19.0	0.1-2.0
TJ-IU	21	0.64 ± 0.03	0.67 ± 0.01	6.0	0.1-2.0
W7-AS $t_a = 0.243$	24	0.62 ± 0.01	0.60 ± 0.04	20.0	1-20
W7-AS $t_a = 0.355$	29	0.72 ± 0.07	0.66 ± 0.06	19.0	1-20
ATF	20	0.71 ± 0.03	0.92 ± 0.07	34.0	1-12
RFX	29	0.69 ± 0.04	...	3	0.03-3.0
Thorello	10	0.55 ± 0.04	...	6	0.05-5.0

案，即湍流和剖面自发形成一种准周期性的模式（Quasi-periodic Pattern）。模式中：

1. 部分区域内湍流输运强烈，呈现类雪崩输运。受此影响，此类区域局域的剖面较平缓；
2. 另一部分区域内湍流输运减弱，局域剖面陡峭，伴有剪切层。这类区域类似小型 ITB。

两类区域在空间上交替出现，使得压强剖面形成类似台阶的准周期模式。因其和 $E \times B$ 剪切层的强烈关联，故称其为 $E \times B$ 台阶。某种程度上可以说湍流借助 $E \times B$ 台阶达成了一种对立统一的调和状态。对 $E \times B$ 台阶现象的理解仍在发展中，国内外现有研究都主要从数值模拟和理论的角度出发，实验上的观测也是在近几年才逐渐出现。下面对这些研究分别从模拟、实验、理论三方面做一个简要的回顾。

托卡马克中 $E \times B$ 台阶现象最早是在一系列的回旋动理学模拟中被观察到，其中最具代表性的是 Dif-Pradalier 等人的模拟结果^[7, 11, 56]，如图 1.19 所示。注意到图中出现的温度梯度 ∇T 的褶皱和 $E \times B$ 剪切层在空间上的重合关系，这说明两者之间存在着很强的内在联系。

在考察台面（剖面较平缓）区域内的类雪崩输运时发现：该区域内的通量和梯度之间似乎不遵循通常的菲克定律关系，而是遵循下面的非局域关系^[11]：

$$Q(r) = - \int K_r(r, r') \nabla T(r') dr' \quad (1.17)$$

其中 $K(r, r')$ 是一个卷积核，表征了某种待定的非局域效应。通过对模拟数据的分

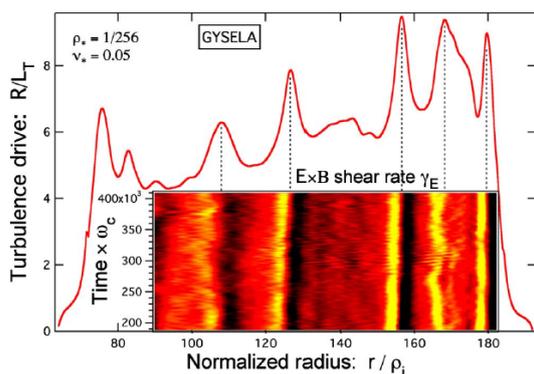


图 1.19 平均温度分布中的褶皱和 $E \times B$ 剪切流的位置存在重合^[11]

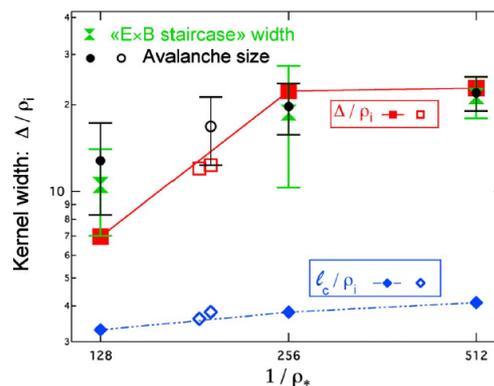


图 1.20 湍流自相关长度（蓝色点线）、台阶宽度（绿色点）和影响长度（红线）以及其他物理量的比较^[11]

析, Dif-Pradalier 等人发现该卷积核的分布函数似乎可以用 Lévy 分布函数表示, 而 Lévy 分布函数的特点是具有发散的二阶矩, 如图 1.21 所示。Cauchy-Lorentz 分布函数作为 Lévy 分布的一个特例, 表达式为,

$$K_r(r, r') = \frac{\Lambda}{\pi} \frac{\Delta/2}{(\Delta/2)^2 + |r - r'|^2} \quad (1.18)$$

其中的 Δ 表示一个径向的影响长度, 在这里它表征了非局域性的强弱。将影响长度 Δ 、台面宽度、湍流自相关长度 l_c 三者进行比较之后发现, 台面区域的宽度与 Δ 的大小接近, 与湍流自相关长度关系不大, 如图 1.20 所示。换句话说, 这里台阶的形成或许和热通量中非局域性有关, 这也启发了一些从热通量角度出发的台阶形成机制的讨论^[52, 57]。从图 1.20 可以得出一个重要的信息: 台阶宽度 (或影响长度 Δ) 是明显大于湍流相关长度的, 处在了本论文研究背景中提到的介观尺度上 $l_c \ll \Delta \ll a$!

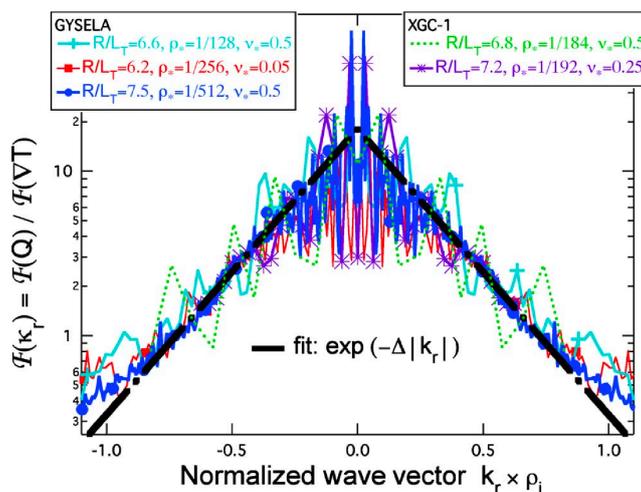


图 1.21 热通量和温度梯度之间的卷积核可用一个 Cauchy-Lorentz 分布函数近似^[11]

以上的结果都是利用 5 维的 GYSELA 动理学程序给出的，也存在通过其他简化的动理学程序得到的 $E \times B$ 台阶。一个例子是 Norscini 等用 TOKAM2D 程序得到的结果中也出现了 y 方向上平均电势的准周期模式^[58]，如图 1.22 所示。TOKAM2D 程序中的几何因子 g 取值较小时，易于出现台阶。这对应于更接近 ITER 的装置尺寸，湍流模式的自组织时间更短，更倾向于形成台阶。

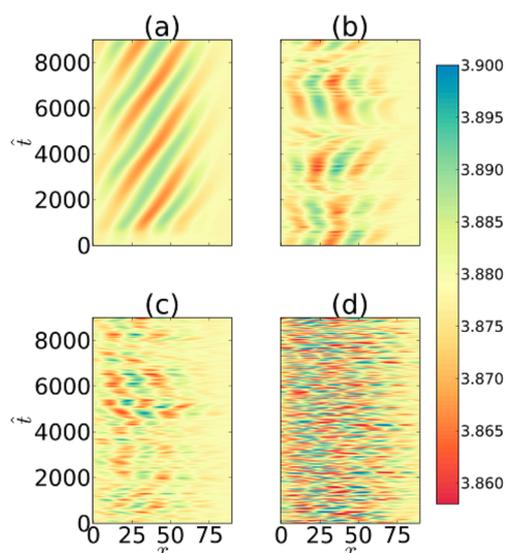


图 1.22 TOKAM2D 中不同几何因子 g 下的平均电势等高图：(a) 1.2×10^{-4} ，(b) 1.5×10^{-4} ，(c) 2×10^{-4} ，(d) 5.7×10^{-4} ^[58]

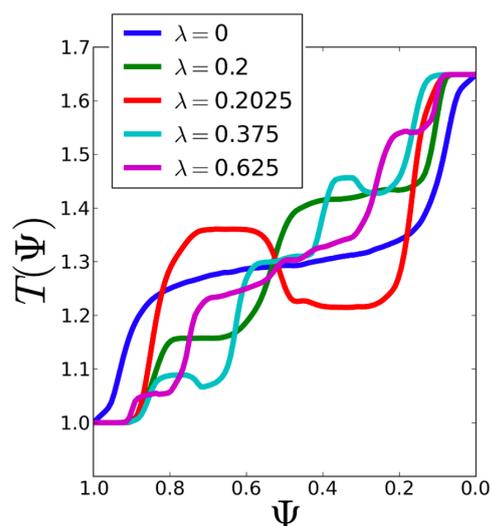


图 1.23 TERESA 程序计算得到的参数 λ 取不同值时的温度剖面^[59]

另一个例子是基于 Darmet 模型的四维动理学程序 TERESA，也给出了剖面台阶^[59]，如图 1.23。这个程序类似于 GYSELA，不过更为简化，同时相比 TOKAM2D 这样的玩具模型（Toy Model）又保留了更多的等离子体湍流自组织过程。通过调整其中的参数可以改变观察到的台阶形状等。不过遗憾的是依然没有从中给出台阶形成背后的物理机制。

总结下来，这些模拟程序给出了 $E \times B$ 台阶的一些基本的信息，除了前面提到的台阶是两种输运状态决定的剖面在空间上形成的准规则模式之外，还有^[56]：

- $E \times B$ 台阶是近临界的模式（Pattern）；
- 台阶需要低碰撞率，因为高碰撞率会将微带状平均流阻尼掉；
- 湍流中的通量可能是梯度的多值函数；
- 台阶和 q 剖面关联不强；
- Flux-driven 系统更易驱动出台阶；
- 台阶宽度处在介观尺度。

特别是台阶宽度在介观尺度这一点，可能和 gyro-Bohm 定标率的失效存在联系。台阶的形成影响了输运，因为形成的一系列微输运垒有助约束回归到 gyro-Bohm 定

标。

实验测量 $E \times B$ 台阶存在比较大的困难，首先需要时间分辨在 1 到 5ms，因为超出这个时间，在模拟中观察到的褶皱已经移动了数个台阶宽度，在时间上的积分会抹去这些褶皱信息。其次，褶皱的空间尺度在十几个相对离子回旋半径，想要捕捉到这样的梯度也十分困难。这样的高时空分辨率诊断，一般只能探测台基区，但是台基区的碰撞率却高于 $E \times B$ 台阶形成的条件。最后，需要将台阶的结构和演化同 MHD 隔绝，否则只能看到 MHD 的行为，也看不到台阶^[56]。

首次在实验中观察到 $E \times B$ 台阶存在的证据是 ToreSupra 中，利用高分辨率快速扫描 X 模反射计测量湍流的径向相关长度分布^[7]。发现结果中存在如图 1.24 所示的准周期性的相关长度减弱，实验结果和模拟结果之间的也可以找到对应。但是该实验中测得的其实是一系列的准周期输运垒，它无法分辨出台阶和准周期的 $E \times B$ 阵列的区别。

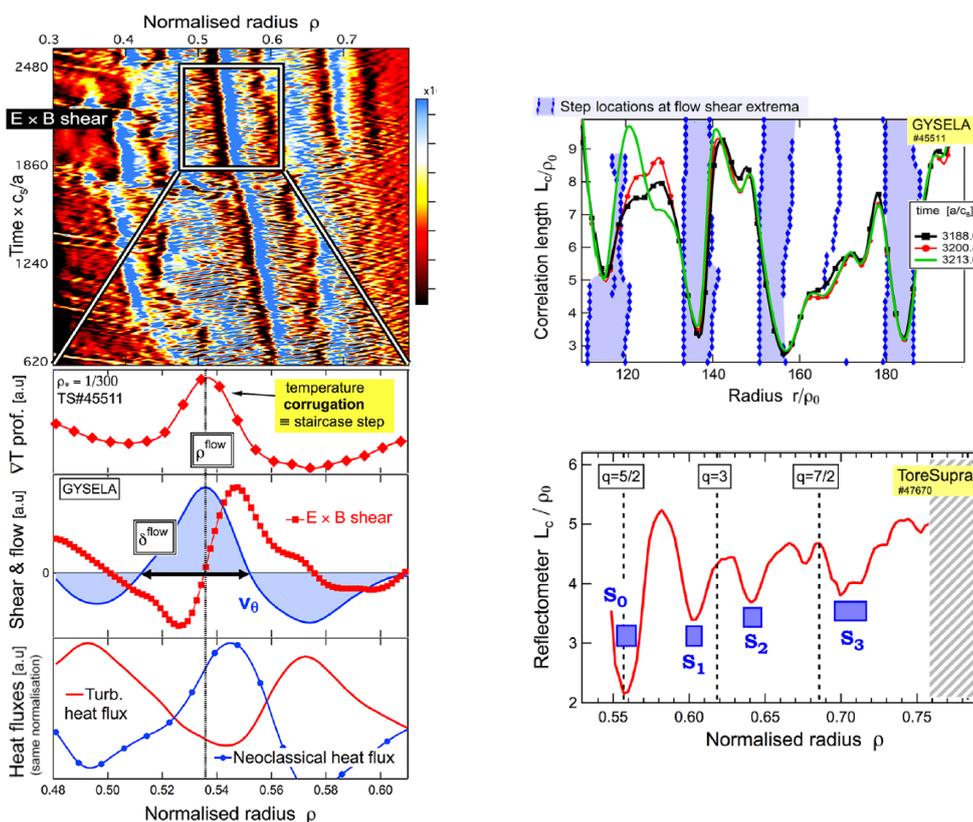


图 1.24 左图为模拟中剪切流–平均分布之间的相互作用，右上图为 GYSELA 计算得到扰动相关长度，右下为 ToreSupra 中，反射计测量得到的相关长度，可见在 S_0, S_1, S_2, S_3 处可能存在剪切层，从而可能存在台阶^[7]

在最近的 KSTAR 实验中，观察到类雪崩输运事件和介观剪切流结构之间的相互作用^[12]，如图 1.25。在 L 模等离子体中，利用 ECEI 可以观察到温度扰动存在的准周期分布，在大约 750 μs 内，空间分布大约 5 个离子回旋半径的温度扰动 δT_e 向

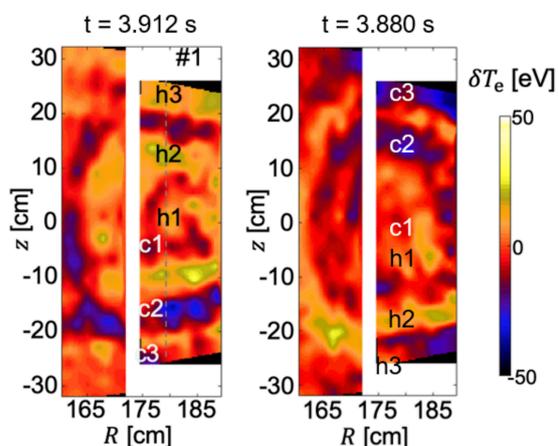


图 1.25 KSTAR 中 ECEI 测量得到温度台阶^[12]

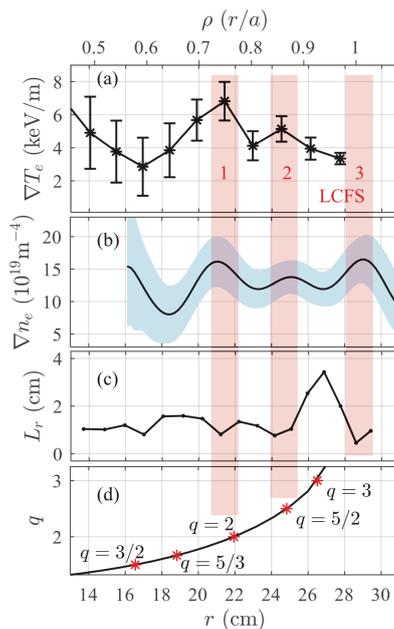


图 1.26 HL-2A 中 ECE 和反射计测量得到温度台阶^[13]

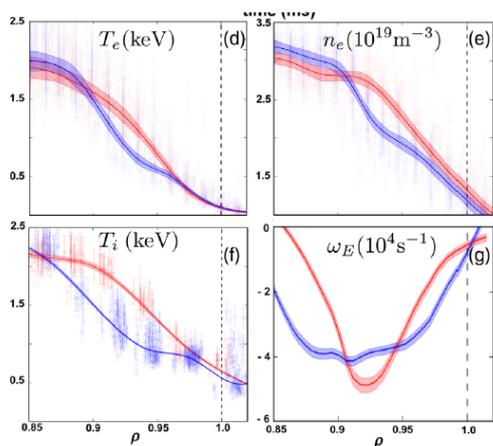


图 1.27 DIII-D 中测量结果 (d) - (g) 为扰动量和 $E \times B$ 环向转动频率沿径向分布^[9]

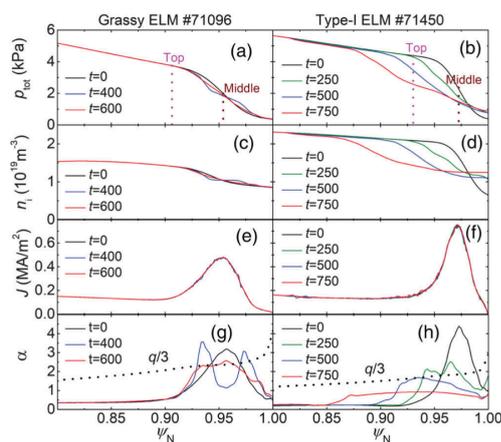


图 1.28 BOUT++ 对 EAST 中 Grassy ELM 和 Type-I ELM 实验的模拟结果^[10], 注意到压强剖面 (a) 中出现的两级台基

下移动了十几个离子回旋半径。长程大尺度的事件只在 T_e 的剖面褶皱随着 $m = 1$ 的扰动的出现而被破坏之后才出现。而 T_e 的剖面褶皱又紧随长程大尺度事件的结束而开始。实验测得的褶皱宽度大约在 $45 \rho_i$, 大于在 Tore Supra 中观察到的值。在 HL-2A 中利用 ECE 和反射计也得到了类似的结果^[13], 如图 1.26。

最后, 值得一提的是, 虽然根据数值模拟给出的结论, 在台基区的碰撞率较高, 不易形成台阶。但是在 DIII-D 的一个实验中观察到边界输运垒的准周期震荡行为, 即剖面在一级台基和两级台基的状态间来回震荡^[9], 如图 1.27 所示。相比于单级台基, 电子温度密度、离子温度在双级台基期间都明显更高, 这意味着一

个更高压强的 H 模。利用 BES 测量发现，台基顶部和台基中部的密度扰动在双级台基阶段增强了，这是由于在此区域 $E \times B$ 剪切对长波长不稳定性的不完全抑制。而扰动的增强并没有破坏 H 模的运输垒，相反，台基宽度和压强都变大了。利用局域性的 CGYRO 程序计算后发现，这可能和运输的分叉行为相关，即从 KBM 限制的运输转移到 TEM 限制。偏滤器内打击点的热通量水平也发生着准周期性的变化，主要的边界局域模被抑制，呈现出 grassy ELMs 的状态。在 EAST 中对 grassy ELM 实验的 BOUT++ 模拟似乎也在暗示此类 grassy ELM 模式和多级台基存在关联^[10]，如图 1.28。在台基中观察到的这类台阶行为和前述的 $E \times B$ 台阶似乎并不相同，在理论上也还没有更多的解释，但是却显示出制造多级台阶这一方法在改善装置约束方面非常有潜力！

为了解释 $E \times B$ 台阶的形成，人们提出了许多理论。问题的关键在于如何处理湍流自扩散、雪崩输运、剖面演化、平均流剪切这些量之间的相互作用，进一步给出触发台阶的条件，最终理解台阶尺度的涌现这个问题。目前有两种理论方法发展起来：

1. 边值问题。湍流在一定区间内增长、饱和，最终形成台阶。机制上需要运输出现分岔，表现为一个依赖于梯度的混合长度，导致双稳定性（Bistable）。
2. 初值问题。热通量在雪崩输运中相对梯度值存在时间延迟，在较大的反应时间下，等效扩散系数出现负值导致阻塞不稳定性（Jam Instability）。

第一种方法基于 Hasegawa-Wakatani 系统给出的 $K - \varepsilon$ 模型^[8, 60]，其中包含平均密度 n ，平均涡量 u ，和湍流涡量拟能（Potential Enstrophy） \mathcal{E} 。 $E \times B$ 台阶可类比行星流体中有名的势涡（PV）台阶^[61]。对 HW 这样的漂移波系统或准地转湍流系统，存在所谓的 Rhines 尺度^[62]，其被定义为涡旋的回旋率和三波错配频率相当时对应的尺度，近似地有 $l_{Rh} \sim \sqrt{\mathcal{E}/|\partial_x q|}$ 。另一个重要的尺度是湍流力相关的尺度 l_0 。这类模型认为由于势涡的非均匀混合，使得混合长度在势涡 $q \equiv n - u$ 的梯度不同时，混合长度会不同。为了计算平均通量，构造了一个依赖于势涡梯度的混合长度：

$$l_{\text{mix}} = \frac{l_0}{(1 + l_0^2 [\partial_x (n - u)]^2 / \mathcal{E})^{\kappa/2}} \quad (1.19)$$

其中存在对剖面梯度的依赖。势涡 $n - u$ 梯度较弱时，混合长度由湍流力尺度 l_0 决定；梯度较强时，混合长度近似为 $l \sim l_0^{1-\kappa} l_{Rh}^\kappa$ 。由于加入了对梯度的依赖，引入了双稳定性（Bistability），即系统可以存在两种稳定状态。模型可以给出密度分布存在台阶的解如图 1.29。其中，台阶是缓慢变化的，小的台面会逐渐融合成大的台面。另外，湍流自扩散的增强会使得台阶被抹平。基于相同模型，也有研究考虑了

平均流剪切对台阶的影响，结论是 $E \times B$ 剪切的作用不强^[63]。这类模型最明显的问题是 (1.19) 的提出是完全唯象的，没有严格的推导过程。

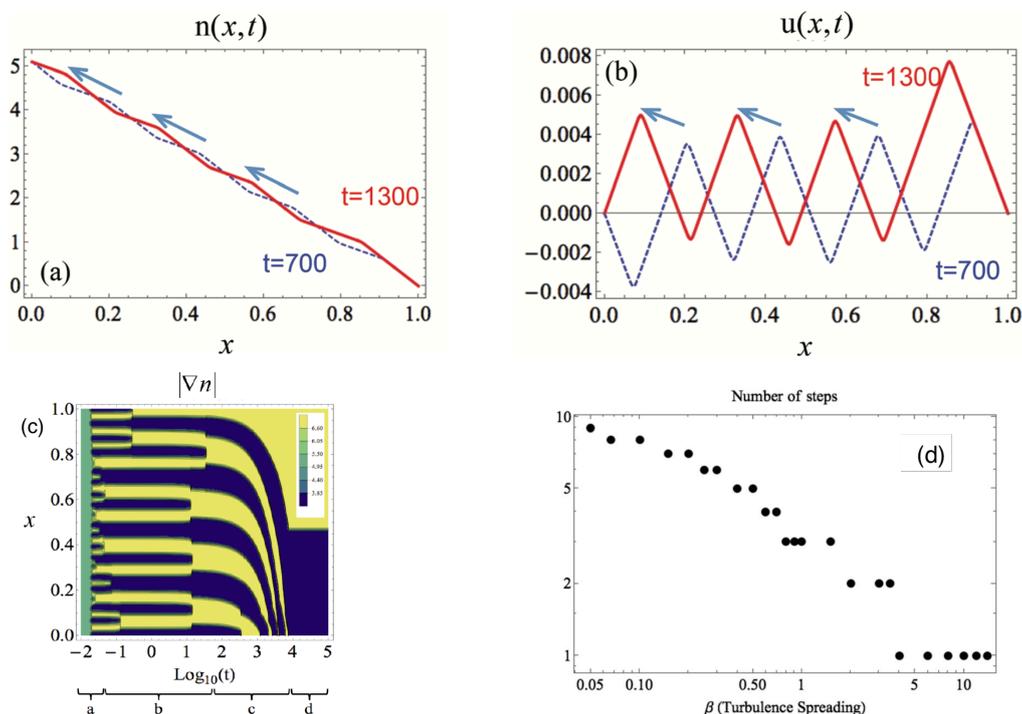


图 1.29 左上图为向上传播的台阶；右上图中剪切层从产生的位置处离开，向边界传播；左下图中密度梯度沿等离子体径向的变化^[60]。右下图为随着参数 β （表征湍流自扩散强度）的逐渐增大，在模拟早期观察到的台阶数量减少^[8]

第二种方法则是借助湍流热的雪崩运输与交通流的类比，考虑热通量相对温度梯度的延迟响应^[52, 53]。在一维的交通流中：由于驾驶员从对前车状况（即本地车辆密度）判断到采取行动踩下刹车之间存在反应时间，导致车流和车密度之间存在响应时间差，以致于在一定条件下可能发生阻塞/簇集不稳定性。在等离子体中，类比到交通流，热量的雪崩运输和梯度如果存在时间延迟，当响应时间足够大，则等效的运输系数为负，也可能产生不稳定性。首先给出温度扰动和雪崩运输热通量的基本形式如下^[50]：

$$\partial_t \delta T = -\partial_x Q \quad (1.20)$$

$$Q = Q_0[\delta T] = (\lambda/2)\delta T^2 - \chi_2 \partial_x \delta T + \chi_4 \partial_x^3 \delta T \quad (1.21)$$

这里的热通量遵循雪崩运输中的 JRS 关系，其中的三阶导数项引起超扩散性从而使模型稳定。考虑任何热通量中的“惯性”都可能导致时间延迟，

$$\partial_t Q = -\frac{1}{\tau}(Q - Q_0[\delta T]) \quad (1.22)$$

其中 τ 是热通量的驰豫时间，可以将其理解为实时热通量和准线性预测值之间的

时间延迟。热通量弛豫时间对应于一个事实，即对雪崩输运而言，梯度发生瞬间（极快速）的变化之后，热通量需要一定的时间对此作出反应。在这些考量下，方程 (1.20) 变成一个如下的非线性电报方程（Nonlinear Telegraph Equation）^[52, 53]：

$$\partial_t \delta T + \lambda \delta T \partial_x \delta T = \chi_2 \partial_x^2 \delta T - \chi_4 \partial_x^4 \delta T - \tau \partial_t^2 \delta T \quad (1.23)$$

$$\implies \partial_t \delta \tilde{T} + v_0 \partial_x \delta \tilde{T} \simeq (\chi_2 - v_0^2 \tau) \partial_x^2 \delta \tilde{T} - \chi_4 \partial_x^4 \delta \tilde{T} \quad (1.24)$$

方程中存在两种特征速度，一是 $v_0 \sim \lambda \delta T_0$ ，即幅度为 δT_0 的脉冲的自然传播速度；二是一个热通量的波动相速度， $v_{\text{ph}} \sim (\chi_2/\tau)^{1/2}$ 。热通量弛豫时间较小意味着热通量波动传播的更快；而较大的弛豫时间则对应于热通量脉冲传播快于热通量波动，结果在线性化后的方程中体现为等效的扩散系数变为负值，出现簇集不稳定性（Clustering Instability）。这种理论和第一种方法存在相同的问题，模型 (1.22) 中提出的延迟时间依然没有严格的推导。

在 (1.22) 中延迟时间的具体表达式的研究上，Gürçan 等在 [57] 中从漂移动理学方程出发，利用两点相关函数理论，尝试构造出了类似的通量演化关系：

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}_E \cdot \nabla \right) Q + \langle \tilde{v}_{Er} \nabla_{\parallel} \tilde{q}_{\parallel} \rangle + \langle \tilde{v}_{Er} \tilde{\mathbf{v}}_E \rangle \cdot \nabla \bar{P} + \nabla \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}}_E \tilde{v}_{Er} \bar{P} \rangle \\ & - q \int v_1 \langle \tilde{E}_{\parallel 1} \tilde{v}_{Er,1} \tilde{f}_1 \rangle d^3 v_1 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

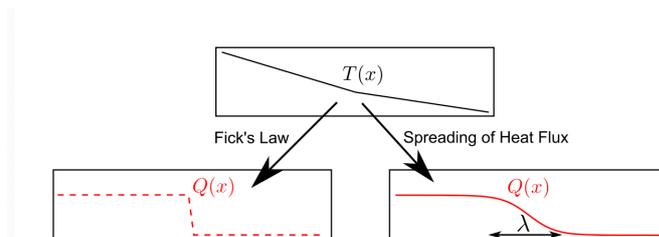
$$\implies \frac{\partial}{\partial t} Q + n_0 \langle \tilde{v}_{Er}^2 \rangle \nabla_r \tilde{T} \nabla_r \cdot \Gamma_Q + \gamma_{nl} \langle \tilde{v}_{Er}^2 \rangle Q = 0 \quad (1.26)$$

响应时间作为非线性项出现，从而可以认为热通量的演化遵循如下关系：

$$\tau \frac{\partial Q}{\partial t} + \tau \nabla_r \cdot \Gamma_Q + \chi_i \nabla_r + Q = 0 \quad (1.27)$$

它会使得热通量在空间上弥散一个宽度 $\lambda = \sqrt{D\tau}$ ，如图 1.30 所示，该宽度对应于空间上的一个格林函数卷积核的宽度。但是 (1.26) 并没有真正给出响应时间 ($1/\gamma_{nl}$) 的具体形式，因为在该项研究中并没有真正去处理非线性三乘积项。同时这项工作推导出的两点相关分布函数方程也不够直观。归纳起来， $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 的通量响应时间模型是一种对 Fick 定律的修正，可以在前面提到的一些模拟研究中看到这种修正可能存在的证据^[11]，但其仍是一个有待验证的猜想。最近的一些研究还发现， $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 台阶的形成和输运的相位也存在关系^[64]。另外一些研究发现，带状涡度和密度剖面褶皱的耦合出现在了谱传输率中，并决定了剖面之间的相位^[65]。

总体来说， $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 台阶的理论研究仍在发展中，无论是梯度决定的相关长度或是热通量响应时间延迟都是尚待检验的理论。要真正解决台阶形成机制的问题，仍然需要讨论湍流、压强剖面、热通量、平均流等构成的多场演化系统，模型中也可能需要适当考虑微观效应。本论文将在第 4 章中给出一种新的台阶形成机制，

图 1.30 不同通量梯度关系的示意图^[57]

即通过 $E \times B$ 平均流触发波与捕获离子的共振导致共振输运，进而形成台阶。

1.3 研究内容和研究意义

本论文的研究内容可以概括为从第一性原理出发，推导湍流自扩散和剖面台阶演化模型，并用理论和数值方法加以研究，分析托卡马克中湍流自扩散的物理过程和 $E \times B$ 台阶的形成机制。

通过这项研究可以：一方面得到一个更为严格推导的湍流自扩散模型，以便发掘出湍流自扩散中被忽略的物理过程（比如非局域性），从而更好地理解模拟和实验现象；另一方面由于我们的剖面演化系统的推导过程更加严格，并且其中包含了波-粒子共振作用，从而弥补了以往理论模型缺乏微观效应的缺点，为 $E \times B$ 台阶形成提供了新视角。剖面模型和湍流自扩散模型形成了一个较为完备的剖面-湍流演化系统，并且具备拓展到高能粒子-湍流等研究领域的潜力。对这一系统的研究可以加深对托卡马克中的介观物理过程的理解，并在大规模数值计算的简化、理解回旋玻姆定标率失效、探索聚变装置新运行模式等问题上有潜在应用。

1.4 研究方案

在研究方法上，论文以理论推导为主，同时结合数值计算进行分析。理论推导过程可以概括为图 1.31。我们基于第一性原理，针对低频（湍流频率低于香蕉粒子回弹频率， $\omega < \omega_b$ ）的类交换模等离子体湍流，将从一个经过回旋平均和回弹平均简化的动理学方程（Kinetic Equation）出发，用求矩等方法给出温度扰动和电势扰动等宏观量的演化方程。在后面可以看到，该宏观量系统可以转化为一个势涡守恒系统。以此为势涡守恒系统为载体，利用相关函数（Correlation Function）和闭包（Closure）等方法，可以得到湍流强度量或通量（如 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle_{\mathbf{k}}$ 、 $\langle \tilde{V}_\nu \tilde{T} \rangle_{\mathbf{k}}$ ）的表达式。对这些量，进一步使用 Fourier 逆变换、Green 函数等方法，可以得到其在实空间中的表达式。利用这些物理量的表达式，我们一方面可以用数值和解析的方法研究湍流强度（如 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ ）的演化来讨论湍流自扩散问题；另一方面可以用通量

表达式闭合剖面（如 $\langle T \rangle$ ）的演化方程，从而讨论平均剖面是否存在台阶现象、如何控制台阶产生、台阶的特性等问题。

在数值计算方法的选择上，对湍流自扩散问题中推导出的方程，采用成熟的差分格式对方程离散化，在时间维度使用龙格库塔法。对剖面演化问题中推导出的方程组，我们采用更为高效的数值直线法，将方程组转化为一组微分代数方程求解。

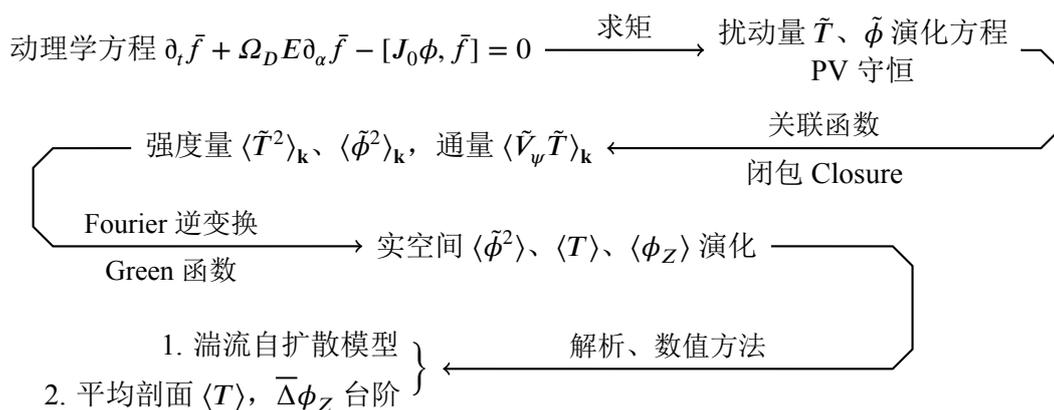


图 1.31 研究路线图

本论文的内容结构为：在第 2 章从一个简化的动理学系统（Darnet 模型）推导出一个势涡守恒系统，并对动理学系统描述的捕获离子模的色散关系进行讨论。在第 3 章将势涡守恒系统应用于湍流自扩散问题，给出一个包含显式非局域效应的湍流自扩散模型，然后研究非局域效应对湍流自扩散的影响。在第 4 章将研究势涡守恒系统中平均剖面的演化，结合进一步拓展的湍流自扩散模型，得到一个湍流-剖面演化系统，接着从解析和数值的角度分析剖面台阶的形成过程，给出新的台阶形成机制和台阶特性。最后在第五章对博士课题工作进行总结。

第 2 章 势涡守恒系统

2.1 Darnet 模型

对托卡马克中的等离子体而言，最基本的描述方式是粒子分布函数 (Distribution Function)，分布函数的相空间为 (\mathbf{x}, \mathbf{p}) 。相空间可以被替换为一组作用量和角度 (\mathbf{J}, ϕ) 。对捕获离子而言， $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$ 是一系列绝热不变量， (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) 是回旋相位、回弹相位和进动相位。对低频等离子体湍流 ($\omega < \omega_b$, ω_b 是捕获粒子回弹频率的典型值) 而言，三种相位中的回旋和回弹相位变化显著地快于系统时间，并且有如下时间尺度的分离：

$$\omega_{ti}, \omega_{bi} > \omega_*^i > \omega \sim \omega_{Di} > \nu_{\text{eff}}^i \quad (2.1)$$

$$\omega_{te}, \omega_{be} > \nu_{\text{eff}}^e > \omega_*^e > \omega \quad (2.2)$$

上述第一组关系中各项分别为捕获离子的穿行、回弹频率、逆磁漂移频率、捕获离子模频率、磁曲率漂移和碰撞频率，第二组关系中为电子对应的项。故可对分布函数的回旋相和回弹相做平均，从而得到一个经过双平均的分布函数 \bar{f} ，而相空间也被简化为了 3 维 (ψ, α, E) 。这里的 ψ 和 α 是径向和环向的坐标，而 E 则是能量 (或速度) 坐标。分布函数 \bar{f} 由下面的动理学方程 (Kinetic Equation) 决定^[66]：

$$\partial_t \bar{f} + \Omega_D E \partial_\alpha \bar{f} - [J_0 \phi, \bar{f}] = 0 \quad (2.3)$$

其中 $[F, G] = \partial_\alpha F \partial_\psi G - \partial_\psi F \partial_\alpha G$ 是 Poisson 括号， J_0 是一个回旋和回弹平均算符。 $\Omega_D E$ 是捕获粒子的进动速度，本论文中假设 Ω_D 是一个常数。因为方程在回弹相位上做了平均，所以方程在时间上的单位是进动时间的典型值。同时由于捕获离子湍流的空间尺度在香蕉宽度和离子回旋半径量级，远大于德拜长度，所以泊松方程被准中性条件 $n_i = n_e$ 代替。

我们可以将分布函数 \bar{f} 分解为三个部分：平均分布函数 $\langle f \rangle$ ，绝热响应分布函数 $-\langle f \rangle q_{i,e} \phi / T_{i,e}$ ，非绝热分布函数 $h_{i,e}$ ，这里假设了 $q\phi / T_{\text{eq}}$ 为小量。一个关键点是，扰动粒子密度不应当响应带状的电势。于是我们应当将绝热响应分布函数改写为 $-\langle f \rangle q_{i,e} (\phi - \langle \phi \rangle_\alpha) / T_{i,e}$ ，那么将其在速度 (能量) 空间积分之后，会得到 $\tilde{n}_{i,e} / n_0 = -q_{i,e} (\phi - \langle \phi \rangle_\alpha) / T_{i,e}$ 。总的分布函数写作如下的形式：

$$\bar{f}_{i,e} = \langle f_{i,e} \rangle - \frac{q_{i,e}}{T_{i,e}} (\phi - \langle \phi \rangle_\alpha) \langle f_{i,e} \rangle + h_{i,e} \quad (2.4)$$

于是现在可以将准中性条件 $n_i = n_e$ 用上述分布函数在能量空间的积分表示：

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n_0\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} J_0 \left[-\frac{q}{T_i} (\phi - \langle \phi \rangle_\alpha) \langle f_i \rangle + h_i \right] \sqrt{E} dE + \bar{\Delta}_i \frac{q\phi}{T_i} \\ & = \frac{2}{n_0\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} J_0 \left[\frac{q}{T_e} (\phi - \langle \phi \rangle_\alpha) \langle f_e \rangle + h_e \right] \sqrt{E} dE - \bar{\Delta}_e \frac{q\phi}{T_e} \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中 $\bar{\Delta}_s = \rho_{0s}^2 \partial_\alpha^2 + \delta_{bs}^2 \partial_\psi^2$ 代表极化电荷——来源于（回旋）回弹中心这样的准粒子和真实粒子的密度间的差异。方程 (2.5) 可以重写为方程 (2.7)，即一个动理学准中性方程。其右端由非绝热粒子分布函数 $h_{i,e}$ 或非绝热电荷 $\tilde{n}_{\text{nonad},i}$ 和 $\tilde{n}_{\text{nonad},e}$ 决定。同时，非绝热分布函数满足如下动理学方程 (2.6)：

$$\begin{aligned} & \partial_t h_i + \Omega_D E \partial_\alpha h_i - \left[\bar{\phi}, -\frac{q}{T_i} (\phi - \langle \phi \rangle_\alpha) \langle f_i \rangle + h_i \right] \\ & = \partial_t \left(\frac{q}{T_i} (\phi - \langle \phi \rangle_\alpha) \langle f_i \rangle \right) + \partial_\alpha (\overline{\phi - \langle \phi \rangle_\alpha}) \partial_\psi \langle f_i \rangle \\ C_{ad} (\phi - \langle \phi \rangle_\alpha) - C_i \bar{\Delta}_{i+e} \phi & = \frac{2}{n_0\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\infty} J_0 h_i \sqrt{E} dE - \int_0^{\infty} J_0 h_e \sqrt{E} dE \right) \\ & = \tilde{n}_{\text{nonad},i} - \tilde{n}_{\text{nonad},e} \end{aligned} \quad (2.6)$$

在这里， $C_i = q/T_i$ ， $C_{ad} = C_i(1 + \tau)/\sqrt{2\varepsilon_0}$ ， $\tau = T_i/T_e$ ， $\bar{\Delta}_{i+e} = \bar{\Delta}_i + \tau\bar{\Delta}_e$ 。 $(\phi - \langle \phi \rangle_\alpha)$ 代表二重相位平均后的电势。 $\varepsilon_0 = a/R$ 是环径比的倒数， $\sqrt{2\varepsilon_0}$ 是捕获粒子的份额。方程 (2.6) 和 (2.7) 被称为 Darnet 模型，它们被应用在一系列捕获离子模的回旋动力学模拟中^[66-68]。可以认为 Darnet 模型是描述漂移波湍流的最小化的动理学系统，其中还包含了波-粒子相互作用等效应，这是本论文选择这个模型的一个理由。而且正如本论文在研究背景中提到的，以 Darnet 模型为基础的模拟程序能够得到剖面台阶结果（如图 1.23），所以这样一个足够简单的系统中应当包含了 $E \times B$ 台阶形成所必要的物理过程，这是本论文选择该模型的另一个理由。

2.2 势涡演化的导出

对动理学准中性条件 (2.7)，我们假设绝热电子，即 $h_e = 0$ ，同时忽略 $\bar{\Delta}_e$ 项。将方程 (2.7) 对时间求导，我们将在右侧得到 $\partial_t h_i$ 。可以利用方程 (2.6) 将 $\partial_t h_i$ 消去。

再计算其中的积分 $\frac{2}{n_0\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \dots \sqrt{E} dE$ ，我们得到

$$\begin{aligned} \partial_t \left[C_e(\phi - \langle \phi \rangle_\alpha) - C_i \bar{\Delta}_i \phi \right] = & -\frac{3}{2} \Omega_D \partial_\alpha \tilde{T}_i + \left[\phi, -\frac{q}{\sqrt{2\varepsilon_0 T_i}} (\phi - \langle \phi \rangle_\alpha) + \frac{\tilde{n}_i}{n_0} \right] \\ & - \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \tilde{V}(\psi) \partial_\psi \ln \langle n_i \rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

其中， $C_e = C_i \tau / \sqrt{2\varepsilon_0}$ ，我们简单地取 $J_0 \phi = \bar{\phi} = \phi$ 。当对 $\langle f_i \rangle$ 积分时，会得到一个 $1/\sqrt{2\varepsilon_0}$ 的系数，这是由于 $\langle f_i \rangle$ 是包含所有粒子（包括捕获和穿行粒子）的分布函数。我们希望从 ϕ 中分离出带状模式（ $\phi_Z \equiv \langle \phi \rangle_\alpha$ ）的演化，所以本文中定义 $\phi = \tilde{\phi} + \phi_Z$ ，其中 $\tilde{\phi}$ 是模数 $n \neq 0$ 的捕获离子模式。将该 ϕ 的分解带入上述公式，同时用方程 (2.7) 替换 \tilde{n}_i ，采用类似 [69-71] 中的对称性分解法，得到如下形式。本文在之后的讨论中省略 $\bar{\Delta}_i$ 中的下标 i 。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla + \Omega_Z \cdot \nabla \right) (C_i \bar{\Delta} \tilde{\phi}) = & \frac{3}{2} \Omega_D \partial_\alpha \tilde{T}_i \\ & - i C_e (\omega - \omega_Z + \frac{\omega_{*n}^i}{\tau}) \tilde{\phi} - C_i \tilde{V}(\psi) \partial_\psi (\bar{\Delta} \phi_Z) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (C_i \bar{\Delta} \phi_Z) = & C_i \langle \nabla \tilde{\phi} \times \hat{z} \cdot (\nabla \bar{\Delta} \tilde{\phi}) \rangle_\alpha \\ \equiv & C_i \delta_{b0}^2 \partial_\psi^2 \langle \tilde{V}_\psi \tilde{V}_\alpha \rangle_\alpha \end{aligned} \quad (2.10)$$

其中 $\tilde{\mathbf{V}} = -\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z}$ ， $\Omega_Z = -\nabla \phi_Z \times \hat{z} = \partial_\psi \phi_Z \hat{\mathbf{e}}_\alpha$ 。我们可以看到方程中多普勒频移项的作用 $\omega_{*n}^i = \frac{k_\alpha c T}{q B} \partial_\psi \ln \langle n_i \rangle$ ， $\omega_{*T}^i = \frac{k_\alpha c T}{q B} \partial_\psi \ln \langle T_i \rangle$ ， $\omega_Z = k_\alpha \frac{\partial \phi_Z}{\partial \psi}$ 。当环向平均后的剖面 $\langle T \rangle$ 和 $\langle n \rangle$ 存在褶皱时，不宜使用诸如 L_n^{-1} 或 L_T^{-1} 作为 $\partial_\psi \ln \langle n_i \rangle$ 或 $\partial_\psi \ln \langle T_i \rangle$ 的特征长度，如图 2.1 所示。当平均剖面中不存在褶皱时，我们令 $L_n > 0$ 和 $L_T > 0$ 。方程 (2.9) 和 (2.10) 本质上是涡量的演化方程。在方程 (2.9) 中，等号右边第二项可以结合到左边，从而给出一个有用的势涡（Potential Vorticity, PV）演化方程，势涡定义为 $(\tilde{\phi} - \bar{\Delta} \tilde{\phi})$ 。方程 (2.10) 则显示平均涡度的演化不出意料地由雷诺应力（涡量通量）决定。

注意到在方程 (2.9) 右侧的第一项中包含温度扰动 \tilde{T}_i 的作用，所以完整的系统描述需要包含温度扰动的演化方程。将完整的 \tilde{f}_i 和 ϕ 带入动理学方程 (2.3)，对其取矩 $\frac{2}{3} \frac{2}{n_0 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty \dots E \sqrt{E} dE$ ，便得到温度的演化方程。然后根据对称性，将该方程分解为两部分：

$$\sqrt{2\varepsilon_0} \left(\partial_t + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla + \Omega_Z \cdot \nabla \right) \tilde{T}_i = -i(\omega - \omega_Z - \omega_{*n}^i - \omega_{*T}^i) \langle T_i \rangle \frac{q \tilde{\phi}}{T_i} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\langle T_i \rangle + \langle T_i \rangle \ln \langle n_i \rangle) = & \sqrt{2\varepsilon_0} \langle \nabla \tilde{\phi} \times \hat{z} \cdot \nabla \tilde{T}_i \rangle_\alpha \\ \equiv & -\sqrt{2\varepsilon_0} \partial_\psi \langle \tilde{V}_\psi \tilde{T}_i \rangle_\alpha \end{aligned} \quad (2.12)$$

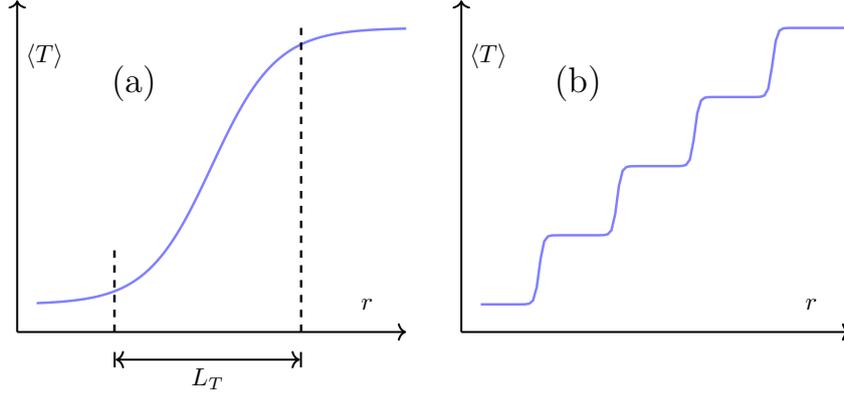


图 2.1 剖面的特征尺度 L_T 定义如图 (a)。对于一个如图 (b) 的褶皱剖面没有合适的 L_T 可供定义

两式即是扰动和平均温度的演化方程。注意到方程 (2.9) 和 (2.11) 存在相似性——他们可以合并成统一的形式！首先，将方程 (2.11) 和 (2.12) 乘以系数 $\tau/(\sqrt{2\varepsilon_0}\langle T_i \rangle)$ ，然后分别从中减去两个涡量方程 (2.9) 和 (2.10)。我们在这里忽略 ω_{*n}^i 和 $\ln\langle n_i \rangle$ ，即假设 L_n 很大，平均密度的演化也很缓慢，或者说我们的模型忽略了平均密度梯度。因为保留密度剖面将会使得系统需要再加入一个密度剖面演化方程，从而让系统变得过于复杂。另一方面，对 ITG/TIM 而言，忽略密度梯度后仍然可以由环效应等引入不稳定性增长所需的温度梯度临界值，从而使我们的结论仍然不失一般性。忽略密度梯度最终得到：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\tau}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \ln\langle T_i \rangle - C_i \bar{\Delta} \phi_Z \right) = \left\langle \nabla \tilde{\phi} \times \hat{z} \cdot \nabla \left(\frac{\tau}{\langle T_i \rangle} \nabla \tilde{T}_i - C_i \bar{\Delta} \tilde{\phi} \right) \right\rangle_\alpha \quad (2.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\tau \frac{\tilde{T}_i}{\langle T_i \rangle} - C_i \bar{\Delta} \tilde{\phi} \right) = -\frac{3}{2} \Omega_D \partial_\alpha \tilde{T}_i - \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla \left(\frac{\tau}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \ln\langle T_i \rangle - C_i \bar{\Delta} \phi_Z \right) \quad (2.14)$$

上述方程可以写为平均和扰动势涡的演化方程：

$$\partial_t \langle q \rangle = \left\langle \nabla \tilde{\phi} \times \hat{z} \cdot \nabla \delta q \right\rangle_\alpha = -\partial_\psi \langle \tilde{v}_\psi \delta q \rangle_\alpha \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dt} \delta q = -\frac{3}{2} \Omega_D \partial_\alpha \tilde{T}_i - \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla \langle q \rangle \quad (2.16)$$

其中的全微分为：

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla + \Omega_Z \cdot \nabla$$

总的势涡定义为 $\langle q \rangle + \delta q$ ，其中，

$$\langle q \rangle = \frac{\tau}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \ln\langle T_i \rangle - C_i \bar{\Delta} \phi_Z \quad (2.17)$$

$$\delta q = \tau \frac{\tilde{T}_i}{\langle T_i \rangle} - C_i \bar{\Delta} \tilde{\phi} \quad (2.18)$$

这代表方程 (2.9) - (2.11) 实际上是一个势涡守恒系统, 总势涡的守恒性取决于 (2.16) 右侧的曲率漂移项。势涡演化由势涡通量决定, 同时也是热通量和涡量通量共同作用的结果。所以理论上来说, 只要我们得到了热通量和涡量通量就可以知道势涡剖面 (包括温度和涡度剖面) 的演化过程。

2.3 势涡通量和涡量拟能

在前一节中已经得到了总的势涡的演化方程 (2.15) 和 (2.16), 基于此我们可以得到涡量拟能 (Potential Enstrophy, PE) 的演化。下面在本节对势涡通量及涡量拟能做一个初步的讨论。方程 (2.16) 乘以 δq , 然后在 α 方向上做平均:

$$\frac{1}{2}\partial_t\langle\delta q^2\rangle + \frac{1}{2}\partial_\psi\langle\tilde{V}_\psi\delta q^2\rangle = -\frac{3}{2}\Omega_D\langle\delta q\partial_\alpha\tilde{T}_i\rangle - \langle\tilde{V}_\psi\delta q\rangle\partial_\psi\langle q\rangle \quad (2.19)$$

则得到涡量拟能的演化方程。方程等号右侧包含 $\langle\delta q\partial_\alpha\tilde{T}_i\rangle$ 和 $\langle\tilde{V}_\psi\delta q\rangle$ 。我们可以结合方程 (2.16), 得到这两项的准线性近似。首先从方程 (2.16) 出发, 可以写出 δq 的准线性表达式如下。我们假设了 $\omega(k) = \omega_R(k) + i\gamma(k)$, 并且 $\gamma(\pm k) \geq 0$ 。

$$\begin{aligned} \delta q_k &= \frac{3}{2}\frac{k_\alpha\Omega_D}{\omega - k_\alpha\Omega_Z}\tilde{T}_k - \frac{i\partial_\psi\langle q\rangle}{\omega - k_\alpha\Omega_Z}\tilde{V}_\psi(k) \\ &= \frac{3}{2}\frac{k_\alpha\Omega_D[\omega_R - k_\alpha\Omega_Z - i\gamma]}{|\omega - k_\alpha\Omega_Z|^2}\tilde{T}_k - \frac{i\partial_\psi\langle q\rangle[\omega_R - k_\alpha\Omega_Z - i\gamma]}{|\omega - k_\alpha\Omega_Z|^2}\tilde{V}_\psi(k) \end{aligned} \quad (2.20)$$

那么, 对 (2.19) 中的 $\langle\tilde{V}_\psi\delta q\rangle$ 而言, 就可以得到:

$$\langle\tilde{V}_\psi(-k)\delta q_k\rangle = \frac{3}{2}\frac{k_\alpha\Omega_D[\omega_R - k_\alpha\Omega_Z - i\gamma]}{|\omega - k_\alpha\Omega_Z|^2}\langle\tilde{V}_\psi\tilde{T}\rangle_k - \frac{i\partial_\psi\langle q\rangle[\omega_R - k_\alpha\Omega_Z - i\gamma]}{|\omega - k_\alpha\Omega_Z|^2}\langle\tilde{V}_\psi^2\rangle_k \quad (2.21)$$

其中的实数部分为:

$$\begin{aligned} \text{Re}\left\{\langle\tilde{V}_\psi\delta q\rangle_k\right\} &= \frac{3}{2}\frac{k_\alpha\Omega_D\left[(\omega_R - k_\alpha\Omega_Z)\text{Re}\left\{\langle\tilde{V}\tilde{T}\rangle_k\right\} + \gamma\text{Im}\left\{\langle\tilde{V}\tilde{T}\rangle_k\right\}\right]}{|\omega - k_\alpha\Omega_Z|^2} \\ &\quad - \frac{\gamma\langle\tilde{V}_\psi^2\rangle_k}{|\omega - k_\alpha\Omega_Z|^2}\partial_\psi\langle q\rangle \end{aligned} \quad (2.22)$$

同理对 $\langle\delta q\partial_\alpha\tilde{T}_i\rangle$, 其准线性近似为

$$\langle ik_\alpha\tilde{T}_k\delta q_{-k}\rangle = -\frac{3}{2}\frac{ik_\alpha^2\Omega_D[-\omega_R + k_\alpha\Omega_Z - i\gamma]}{|\omega - k_\alpha\Omega_Z|^2}\langle\tilde{T}^2\rangle_k + \frac{k_\alpha\partial_\psi\langle q\rangle[-\omega_R + k_\alpha\Omega_Z - i\gamma]}{|\omega - k_\alpha\Omega_Z|^2}\langle\tilde{V}_\psi\tilde{T}\rangle_k \quad (2.23)$$

提取出实数部分：

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \langle ik_\alpha \tilde{T}_k \delta q_{-k} \rangle \right\} = & -\frac{3}{2} \Omega_D \frac{k_\alpha^2 \gamma}{|\omega - k_\alpha \Omega_Z|^2} \langle \tilde{T}^2 \rangle_k \\ & + \frac{k_\alpha \left[-(\omega_R - k_\alpha \Omega_Z) \operatorname{Re} \left\{ \langle \tilde{V} \tilde{T} \rangle_k \right\} + \gamma \operatorname{Im} \left\{ \langle \tilde{V} \tilde{T} \rangle_k \right\} \right]}{|\omega - k_\alpha \Omega_Z|^2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

将上述通量的准线性表达式代入涡量拟能方程 (2.19)，有如下方程：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \langle \delta q^2 \rangle = & \frac{1}{2} \partial_\psi D_\mathcal{E} \partial_\psi \langle \delta q^2 \rangle + D_1 [\partial_\psi \langle q \rangle]^2 + D_2 \left[\frac{3}{2} \Omega_D \right]^2 - 2D_3 \left[\frac{3}{2} \Omega_D \partial_\psi \langle q \rangle \right] \quad (2.25) \\ D_1 = & \sum_k \frac{\gamma \langle \tilde{V}_\psi^2 \rangle_k}{|\omega - k_\alpha \Omega_Z|^2}, \quad D_2 = \sum_k \frac{\gamma k_\alpha^2 \langle \tilde{T}^2 \rangle_k}{|\omega - k_\alpha \Omega_Z|^2}, \quad D_3 = \sum_k \frac{\gamma k_\alpha \operatorname{Im} \left\{ \langle \tilde{V}_\psi \tilde{T} \rangle_k \right\}}{|\omega - k_\alpha \Omega_Z|^2} \end{aligned}$$

根据前面的定义，所有的 $\gamma(\pm k) \geq 0$ 。同时定义 $\langle \delta q^2 \rangle / 2 \equiv \mathcal{E}$ ，那么，

$$\partial_t \mathcal{E} = \partial_\psi D_\mathcal{E} \partial_\psi \mathcal{E} + D_1 [\partial_\psi \langle q \rangle]^2 + D_2 \left[\frac{3}{2} \Omega_D \right]^2 - 2D_3 \left[\frac{3}{2} \Omega_D \partial_\psi \langle q \rangle \right] \quad (2.26)$$

以上即为该系统中涡量拟能在准线性近似下的演化方程。从形式上来说，和 D_1, D_2 相关的项代表的是从平均势涡梯度和曲率漂移中提取能量的驱动，而与 D_3 相关的项则暗示了热通量的相位在涡量拟能演化中起到了关键的作用，具体表现为引入了热通量的虚数部分 $\operatorname{Im} \left\{ \langle \tilde{V}_\psi \tilde{T} \rangle_k \right\}$ 。

虽然上述公式的形式简洁，但是其中的系数 D_1, D_2, D_3 由湍流强度量 $\langle \tilde{V}_\psi^2 \rangle, \langle \tilde{T}^2 \rangle$ 和热通量 $\langle \tilde{V}_\psi \tilde{T} \rangle$ 决定。所以如果要研究湍流的演化，则必须合理地估计这些通量，本论文将在后面的章节对此进行更深入的研究。

2.4 色散关系

本节将讨论捕获离子模式的色散关系，相关结论在后续章节中将被多次用到。动理学方程(2.6)和准中性条件(2.7)在归一化后如下。为了简化记号，在这里做了改写 $(\psi, \alpha) \rightarrow (x, y)$ ：

$$\begin{aligned} \partial_t h_i + \Omega_D E \partial_y h_i - [\phi, -C_i \tilde{\phi} \langle f_i \rangle + h_i] \\ = \partial_t (C_i \tilde{\phi} \langle f_i \rangle) + \partial_y (\phi - \langle \phi \rangle_y) \partial_\psi \langle f_i \rangle \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$C_{ad} \tilde{\phi} - C_i \bar{\Delta} \phi = \frac{2}{n_0 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty J_0 h_i \sqrt{E} dE \quad (2.28)$$

这里 h_i 是非绝热扰动分布函数，而且我们已经假设了绝热电子。 $\hat{\Omega}_D = \Omega_D T_0 / \omega_0, \hat{E} = E / T_0, C_i = \omega_0 L_\psi q / T_0$ ，其中“ \wedge ”已经被省略。

对上面的动理学方程应用傅里叶变换，忽略方程中 ϕ 的环向平均贡献，从而

得到:

$$\begin{aligned}
 (-i\omega + ik_y\Omega_D E)h_i &= -i\omega C_i \tilde{\phi}\langle f_i \rangle + ik_y \tilde{\phi} \partial_x \langle f_i \rangle \\
 &= -i\omega C_i \tilde{\phi}\langle f_i \rangle + \frac{ik_y \partial_x \langle f_i \rangle}{C_i \langle f_i \rangle} C_i \tilde{\phi}\langle f_i \rangle \\
 &= -i[\omega - \omega_*^i(E)]C_i \tilde{\phi}\langle f_i \rangle
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

于是有,

$$h_i = \frac{\omega - \omega_*^i(E)}{\omega - k_y\Omega_D E} C_i \tilde{\phi}\langle f_i \rangle \tag{2.30}$$

其中 $\omega_*^i(E) = \frac{k_y \partial_x \langle f_i \rangle}{C_i \langle f_i \rangle}$ 。令,

$$z \equiv \frac{\omega}{k_y\Omega_D}, \quad \omega_*^i(E) \equiv \frac{\omega_*^i(E)}{k_y\Omega_D} = \frac{1}{C_i\Omega_D} \frac{\partial_x \langle f_i \rangle}{\langle f_i \rangle} = \frac{1}{C_i\Omega_D} \left[\kappa_n + \kappa_T \left(E - \frac{3}{2} \right) \right] \tag{2.31}$$

假设平衡分布函数为 $\langle f \rangle_i = n_0 e^{-E}$ 。从而得到,

$$h_i = \frac{z - \omega_*^i(E)}{z - E} C_i \tilde{\phi} n_0 e^{-E} \tag{2.32}$$

对捕获离子类交换模来说, 把上面的 h_i 代入 (2.28) 直接计算关于 E 的积分, 注意这里的 z 是一个复数。得到色散函数如下,

$$D(k, \omega) = (C_{ad}/C_i) + \rho_{i0}^2 k_y^2 + \delta_{b0}^2 k_x^2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{z - \omega_*^i(E)}{z - E} e^{-E} \sqrt{E} dE \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
 &= (C_{ad}/C_i) + \rho_{i0}^2 k_y^2 + \delta_{b0}^2 k_x^2 \\
 &\quad + 2 \left[z - \frac{\kappa_n}{C_i\Omega_D} \left(1 - \frac{3\eta_i}{2} \right) \right] \left[1 - \sqrt{\pi} e^{-z} \sqrt{-z} - 2\sqrt{z} F(\sqrt{z}) \right] \\
 &\quad - \frac{\kappa_T}{C_i\Omega_D} \left[1 + 2 \left(\sqrt{\pi} e^{-z} (-z)^{3/2} + z \right) - 4z^{3/2} F(\sqrt{z}) \right]
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

这里的 $F(x)$ 是 Dawson 积分:

$$F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{y^2} dy \tag{2.35}$$

或者可以将其结果改写为等离子体色散函数 Z_p 的形式:

$$\begin{aligned}
 D(k, z \equiv \frac{\omega}{k_y\Omega_D}) &= (C_{ad}/C_i) + \rho_{i0}^2 k_y^2 + \delta_{b0}^2 k_x^2 + 2 \left[z - \frac{\kappa_n}{C_i\Omega_D} \left(1 - \frac{3\eta_i}{2} \right) \right] \left[1 + \sqrt{z} Z_p(\sqrt{z}) \right] \\
 &\quad - \frac{\kappa_T}{C_i\Omega_D} \left[1 + 2z + 2z^{3/2} Z_p(\sqrt{z}) \right]
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

2.4.1 线性不稳定性的阈值

按照通常的描述^[72]，在积分 (2.36) 中包含实数和虚数的贡献。在临界增长率 $\gamma \simeq 0$ 的情形下，其对应的临界实频率也必须使得色散函数的虚部为 0，即 $\text{Im } D(k, \omega_{\text{th}}) = 0$ ，这对应于积分中的留数部分为 0：

$$\text{Im } D(k, \omega_{\text{th}}) = 0 \Rightarrow z - \omega_*(E_{\text{res}}) = 0$$

其中 $E_{\text{res}} = \frac{\omega}{k_y \Omega_D}$ 。从上式容易得到 $\gamma \simeq 0$ 时的临界实频率为：

$$\omega_{\text{th}} = \frac{\kappa_n - \frac{3}{2}\kappa_T}{C_i \Omega_D - \kappa_T} k_y \Omega_D \quad (2.37)$$

将这里得到的实频率 ω_{th} 代入到 $D(k, \omega_{\text{th}})$ 的实数部分并且让它为 0。这将给出其对应的临界温度梯度 κ_T^c （在本文中 κ_n 假设为 0）。只有大于该临界梯度，线性不稳定性才能被激发。

$$\kappa_T^c = C_i \Omega_D [C_{ad}/C_i + (\rho_{i0}^2 k_y^2 + \delta_{b0}^2 k_x^2)] \quad (2.38)$$

另外，上述关系 (2.38) 也给出了增长率为正时，可能存在的最大的波数 $k_{x,\text{max}}, k_{y,\text{max}}$ 和 ρ, δ 需要满足的关系如下：

$$\Theta_{\text{max}} \equiv \rho_i^2 k_{y,\text{max}}^2 + \delta_b^2 k_{r,\text{max}}^2 = \frac{\kappa_T}{C_i \Omega_D} - \frac{1 + \tau}{\sqrt{2\epsilon_0}} \quad (2.39)$$

当上式的右侧参数 ϵ_0, τ, C_i 取表 2.1 中的值，同时 $\Omega_D = 1, \kappa_T = 0.4$ 时，我们得到 $\Theta_{\text{max}} \simeq 1.17$ ，该结果和图 2.2 可以很好的吻合。式 (2.39) 中右侧的参数，比如 κ_T 的值不同时会影响 Θ_{max} ，但是只要参数在我们前面给出的值附近，总是有 $\Theta_{\text{max}} \sim \mathcal{O}(1)$ 成立。所以本论文在后面将简单地认为 $\Theta_{\text{max}} \sim 1$ ，并把它作为一个对波数的限制条件，用在第 4 章的推导计算中。

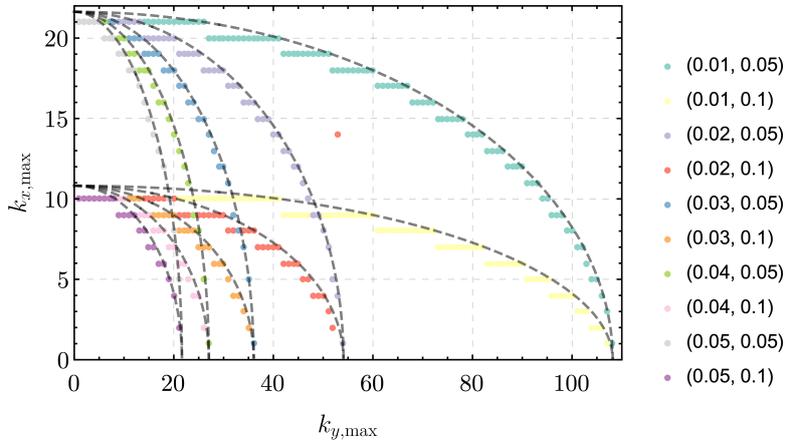


图 2.2 对不同的 (ρ, δ) 所能取到的最大 $k_{x,\text{max}}, k_{y,\text{max}}$ 。按照离散的波数得到扫描结果，可以用 $\rho_i^2 k_y^2 + \delta_b^2 k_r^2 = 1.17$ 拟合数据点，如图中虚线所示

2.4.2 实频率和增长率

当色散函数 (2.36) 中的参数取下表 2.1 给出的值时, 可以用数值求解的方法得到如图 2.3 所示的色散关系。

表 2.1 色散中的关系参数

Parameters	ϵ_0	τ	C_i	ρ	δ	Ω_D	κ_T	κ_n
Values	$\frac{1}{4}$	1	0.1	$2 \times 10^{-3/2}$	0.1	1	0.4 to 0.8	0

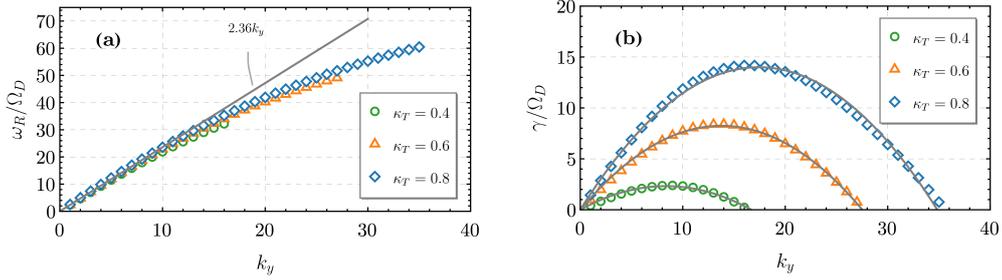


图 2.3 色散关系的数值结果。 $\delta_b^2 = 0.01, \rho^2 = 0.004, k_x = \pi$ 。(a) 不同 κ_T 给出的实频率, 灰线是近似曲线 $2.36k_y$ 。(b) 不同 κ_T 给出的增长率, 灰线是基于模型 (2.41) 给出的拟合曲线。在不同 κ_T 下分别有 Λ/ρ 为 0.223, 0.292, 0.309

观察数值结果我们发现, 实频率可以被下面的曲线很好地拟合:

$$\omega_R = \frac{R_1 k_y \Omega_D}{1 + R_2 (\rho^2 k_y^2 + \delta^2 k_x^2)} \quad (2.40)$$

其中 $R_1 \simeq 2.3675, R_2 \simeq 0.16 \ll 1$, 所以有 $\omega_R \simeq R k_y \omega_D = 2.36 k_y \omega_D$ 。即使改变 k_x 或 κ_T , 仍然可以用上式获得很好的拟合效果。而增长率则可以粗略地近似为:

$$\gamma = \Lambda R \Omega_D k_y (k_{y,\max} - k_y) \quad (2.41)$$

这里的参数 $k_{y,\max}$ 会随着 k_x 和 κ_T 变化。将其转写为 $k_{y,\max} = 1/(\mu_y \rho)$ 。又因为 $\Theta_{\max} \sim 1$, 所以必然有,

$$\mu_y > 1 \quad (2.42)$$

至于另外一个参数 Λ , 我们知道它随着 k_x 和 κ_T 的变化而变化。为了简化, 因为它的单位是长度, 我们定义 $\Lambda = \rho/\sigma$ 。从拟合的结果来看 σ 总是大于 3, 如图 2.3。而且 Λ 会随着 k_x 的增大而减小, 所以我们得出结论:

$$\sigma > 1 \quad (2.43)$$

如果想要保证当 $\kappa_T < \kappa_T^c$ 时, 增长率变为 0, 以满足上一小节中的线性不稳定

阈值条件，我们可以在参数上再加入下面的约束 (2.41)：

$$\sigma = \infty, \mu_y = \infty, \text{ when } \kappa_T < \kappa_T^c \quad (2.44)$$

这可以使得 $\gamma = 0$ 在 $\kappa_T < \kappa_T^c$ 时总是成立。

在上述讨论之后，可以得到一个有用的结论。利用模型 (2.40) 和 (2.41)，我们知道增长率和实频率之间的比值近似为：

$$\frac{\omega_R}{\gamma_{\max}} \simeq \frac{2}{\Lambda k_{y,\max}} \sim \frac{1}{\mu_y \sigma} \quad (2.45)$$

又因为 $\mu_y \sigma > 1$ ，于是有：

$$\frac{\omega_R}{\gamma_{\max}} \sim \mathcal{O}(1) - \mathcal{O}(10) \quad (2.46)$$

这个结论将在第4章中用于化简湍流输运系数。

第3章 势涡守恒系统应用 1: 湍流自扩散模型

在引言中，我们介绍了湍流自扩散现象，以及它在输运定标率、边界-芯部耦合、约束模式转换等问题中发挥的重要作用，也看到了现有湍流自扩散理论大多是唯象模型这一问题。在本章中将从第2章给出的势涡系统出发，推导一个湍流强度的演化方程，并研究其描述的湍流自扩散现象。由此得出的结论也将应用到第4章中关于剖面演化的研究中。

3.1 湍流强度演化方程的推导

3.1.1 势涡 \tilde{U} 演化方程

我们定义部分势涡这一物理量 $\tilde{U} = C_e \tilde{\phi} - C_i \bar{\Delta} \tilde{\phi}$ （与完整扰动势涡 $\delta q = \tau \tilde{T} - C_i \bar{\Delta} \tilde{\phi}$ 作区分），从而可以将前一章中势涡系统中的方程 (2.9) 写为如下形式，同时在本章中做了坐标替换 $(\psi, \alpha) \rightarrow \vec{x} \equiv (r, y)$ 。我们利用了流体运动的不可压缩性并忽略了平均密度梯度。

$$\text{Eq.((2.9))} \implies \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla + \Omega_Z \cdot \nabla \right) \tilde{U} = -\frac{3}{2} \Omega_D \partial_y \tilde{T}_i + C_i v_r \partial_r (\bar{\Delta} \phi_Z) \quad (3.1)$$

这是一个关于物理量 \tilde{U} 的守恒方程（守恒性被曲率漂移和带状电势破坏），所以可以从 $\langle \tilde{U} \tilde{U} \rangle$ 的演化方程推导一个 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 的演化方程。基于 \tilde{U} 的定义，可以写出 $\tilde{\phi}$ 的傅里叶分量如下：

$$\tilde{U}_{\vec{k}} = (C_e + C_i \bar{k}^2) \tilde{\phi}_{\vec{k}} \longrightarrow \tilde{\phi}_{\vec{k}} = \frac{\tilde{U}_{\vec{k}}}{C_e + C_i \bar{k}^2} \quad (3.2)$$

对上面的式子做傅里叶逆变换得到：

$$\tilde{\phi} = \int G(x, x') \tilde{U}(x') dx'$$

基于此，可以先计算势涡 \tilde{U} 的两点相关函数 $\langle \tilde{U}(1) \tilde{U}(2) \rangle$ （或者写为 $\langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle$ ），再将格林函数作用在上面，便可自然地得到 $\langle \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2 \rangle$ ，之后再取极限 $1 \rightarrow 2$ 给出 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ ：

$$\langle \tilde{\phi}^2 \rangle = \lim_{1 \rightarrow 2} \iint G_1(x_1, x'_1) G_1(x_2, x'_2) \langle \tilde{U}(x'_1) \tilde{U}(x'_2) \rangle dx'_1 dx'_2 \quad (3.3)$$

在方程中 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 表征了湍流的强度，可以用于之后计算输运系数。下面给出本章中推导过程的基本路线图。

1. 我们首先计算 $\tilde{U}_1 \partial_t \tilde{U}_2 + \tilde{U}_2 \partial_t \tilde{U}_1$ ，从而得到 $\langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle$ 。 $\langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_1 \rangle$ 的演化方程中的非线性相关项可以用准线性两点关联函数近似。

2. 之后, 对 $\langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle$ 的演化方程应用格林函数给出 $\langle \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2 \rangle$ 的演化方程。利用谱的特征长度大于卷积核的宽度这一性质, 可以简化诸如 $\int G(x_1, x'_1) G(x_2, x'_2) T_r(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2$ 这样的项。这一步得到的结果将类似于:

$$\partial_t \langle \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2 \rangle + \nu(1, 2) \langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle = \gamma(1, 2) + \dots$$

其中的 $\nu(1, 2)$ 来自于格林函数和通量项的卷积, 这里把它形式上简写了。由于它涉及了空间上的卷积, 所以引入了不能简单写为通量散度的贡献。上式中更为重要的是方程右侧的 $\gamma(1, 2)$ 中也引入了格林函数。

3. 最终, 对上面的结果取极限 $1 \rightarrow 2$ 便得到了 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 的演化方程。需要强调的是它不同于通常形式的湍流自扩散方程形式^[15, 16, 20]:

$$\partial_t \mathcal{E} + \nabla \cdot \Gamma_{\mathcal{E}} = \gamma_L \mathcal{E} + \dots$$

通常模型中 \mathcal{E} 是湍流能量, 并且 $\Gamma_{\mathcal{E}}$ 和 γ_L 都由湍流局地地决定。而本文将给出的是关于 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 的方程, 且 Γ 和 γ_L 中都可能非局域性。

3.1.2 涡量拟能 $\langle \tilde{U}^2 \rangle$ 的推导

首先, 如上一节中的研究路线所述, 我们需要先得到势涡 \tilde{U} 的两点关联函数 $\langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle$ 的演化方程, 即势涡 \tilde{U} 对应的涡量拟能, \tilde{U}_1 代表的是处于位置 $x_1 \equiv (r_1, y_1)$ 的 \tilde{U} 势涡。将 \tilde{U}_1 的演化方程乘以 \tilde{U}_2 有:

$$\begin{aligned} & \tilde{U}_2 \partial_t \tilde{U}_1 + \partial_{r_1} (\tilde{v}_{r_1} \tilde{U}_1 \tilde{U}_2) + \partial_{y_1} (\tilde{v}_{y_1} \tilde{U}_1 \tilde{U}_2) + \Omega_Z \partial_{y_1} (\tilde{U}_1 \tilde{U}_2) \\ & = -\frac{3}{2} \Omega_D \tilde{U}_2 \partial_{y_1} \tilde{T}_i(1) + C_i \tilde{U}_2 \tilde{v}_r(1) \partial_r (\bar{\Delta} \phi_Z) \end{aligned} \quad (3.4)$$

加上 $\tilde{U}_1 \partial_t \tilde{U}_2$ 中对应的部分, 得到

$$\begin{aligned} & \partial_t (\tilde{U}_1 \tilde{U}_2) + \partial_{r_1} (\tilde{v}_{r_1} \tilde{U}_1 \tilde{U}_2) + \partial_{r_2} (\tilde{v}_{r_2} \tilde{U}_1 \tilde{U}_2) + \partial_{y_1} (\tilde{v}_{y_1} \tilde{U}_1 \tilde{U}_2) + \partial_{y_2} (\tilde{v}_{y_2} \tilde{U}_1 \tilde{U}_2) \\ & \quad + \Omega_Z (\partial_{y_1} + \partial_{y_2}) (\tilde{U}_1 \tilde{U}_2) \\ & = -\frac{3}{2} \Omega_D (\tilde{U}_2 \partial_{y_1} \tilde{T}_i(1) + \tilde{U}_1 \partial_{y_2} \tilde{T}_i(2)) + C_i \partial_r (\bar{\Delta} \phi_Z) (\tilde{U}_2 \tilde{v}_r(1) + \tilde{U}_1 \tilde{v}_r(2)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

如果简写 $F(1, 2) \equiv \tilde{U}_1 \tilde{U}_2$, 那么 $\langle F \rangle = \langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle$, 其中的尖括号代表平均 $\langle \cdot \rangle = \int \cdot dy_+ / L_y$, $y_+ = (y_1 + y_2) / 2$ 是一个“带状(环向)”平均, 并且 $F = \langle F \rangle + \tilde{F}$, $\tilde{F} = \widetilde{U_1 U_2}$ 。 $\langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle$ 是平均后的势涡关联函数, 而 $\widetilde{U_1 U_2}$ 是由于对流导致的关联函数中的扰动。 $\tilde{U}_1 \tilde{U}_2$ 中的非轴对称部分在经过 y_+ 方向上的平均之后抵消, 即 $\langle \widetilde{U_1 U_2} \rangle = 0$, 所以, 我们可以将方程 (3.5) 分解为平均和扰动两部分, 结果如下:

$$\begin{aligned} & \partial_t \langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle + \partial_{r_1} \langle \tilde{v}_{r_1} \widetilde{U_1 U_2} \rangle + \partial_{y_1} \langle \tilde{v}_{y_1} \widetilde{U_1 U_2} \rangle + (1 \leftrightarrow 2) \\ & = -\frac{3}{2} \Omega_D \langle \tilde{U}_2 \partial_{y_1} \tilde{T}_i(1) \rangle + C_i \partial_r (\bar{\Delta} \phi_Z) \langle \tilde{U}_2 \tilde{v}_r(1) \rangle + (1 \leftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{U_1 U_2} + \partial_{r_1} \left(\tilde{v}_{r_1} \widetilde{U_1 U_2} \right) + \partial_{y_1} \left(\tilde{v}_{y_1} \widetilde{U_1 U_2} \right) + (1 \leftrightarrow 2) + \Omega_Z \left(\partial_{y_1} + \partial_{y_2} \right) \widetilde{U_1 U_2} \\ = -\tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \nabla \langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle - \tilde{\mathbf{v}}_2 \cdot \nabla \langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

对于一个形如 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ 的测试模式, 两点关联函数的扰动 $\widetilde{U_1 U_2}$ 将在两个不同的位置响应这一测试, 从而使驱动出的两点响应形如 $\tilde{F}_k \simeq [e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1}() + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_2}()]$ 。利用这一响应, 可以将诸如 $\langle \tilde{v}_{r_1} \widetilde{U_1 U_2} \rangle$ 的项闭合。注意到我们的研究对象具有 y 方向的均一性和 r 方向上的非均一性! 所以可以在 y 方向上应用傅里叶分解。

$$\left\langle \tilde{v}_{r_1} \widetilde{U_1 U_2} \right\rangle = \left\langle \sum_{k_y} \tilde{v}_{-k_y} e^{-ik_y y_1} \left(\widetilde{U_1 U_2} \right)_{k_y} \right\rangle \quad (3.8)$$

其中, 在位置如 (r_1, y_1) 处, 速度 $\tilde{v}_r(r_1, y_1)$ 和 $\tilde{v}_y(r_1, y_1)$ 可以有如下的傅里叶分解:

$$\tilde{v}_r(r_1, y_1) = \sum_{k_y} \tilde{v}_{k_y}(r_1) e^{ik_y y}, \quad \text{and} \quad \tilde{v}_y(r_1, y_1) = \sum_{k_y} \tilde{v}_{k_y}(r_1) e^{ik_y y} \quad (3.9)$$

基于这样的两点响应和方程 (3.7), 可以写出如下的准线性表达式,

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{U_1 U_2} \right)_{\omega} = - \left[R_{k_y}^{(1)} \tilde{v}_{k_y}(x_1) e^{ik_y y_1} \partial_{r_1} + R_{k_y}^{(1)} \tilde{v}_{k_y}(x_1) e^{ik_y y_1} \partial_{y_1} \right. \\ \left. + R_{k_y}^{(2)} \tilde{v}_{k_y}(x_2) e^{ik_y y_2} \partial_{r_2} + R_{k_y}^{(2)} \tilde{v}_{k_y}(x_2) e^{ik_y y_2} \partial_{y_2} \right] \langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle \end{aligned}$$

其中的 $R_{k_y, \omega}^{(1)} = i/(\omega - k_y V_Z + \frac{i}{\tau_c})$ 是 δf 对 $\tilde{\phi}$ 的响应函数; 带状电势中的剪切可以引起频率迁移, 从而改变相关时间; τ_c 是 \tilde{U} 的相关时间。于是可以将 $\langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle$ 的演化方程中的所有非线性关联项计算出来。具体来说,

$$\begin{aligned} T_1 = \partial_{r_1} \left\langle \tilde{v}_{r_1} \widetilde{U_1 U_2} \right\rangle \\ = - \left\langle \partial_{r_1} \sum_{k_y} \left[R_{k_y}^{(1)} \left| \tilde{v}_{k_y}(x_1) \right|_{r_1}^2 \partial_{r_1} + R_{k_y}^{(2)} \tilde{v}_{-k_y}(x_1) \tilde{v}_{k_y}(x_2) e^{ik_y(y_2-y_1)} \partial_{r_2} \right. \right. \\ \left. \left. + R_{k_y}^{(1)} \tilde{v}_{-k_y}(x_1) \tilde{v}_{k_y}(x_1) \partial_{y_1} + R_{k_y}^{(2)} \tilde{v}_{-k_y}(x_1) \tilde{v}_{k_y}(x_2) e^{ik_y(y_2-y_1)} \partial_{y_2} \right] \langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle \right\rangle \\ \equiv -\partial_{r_1} \left(D_{r,r} \partial_{r_1} + D_{r,r} \partial_{r_2} + D_{r,y} \partial_{y_1} + D_{r,y} \partial_{y_2} \right) \langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle \end{aligned}$$

以及,

$$\begin{aligned} T_2 = \partial_{r_2} \left\langle \tilde{v}_{r_2} \widetilde{U_1 U_2} \right\rangle &= -\partial_{r_2} \left(D_{r,r} \partial_{r_1} + D_{r,r} \partial_{r_2} + D_{r,y} \partial_{y_1} + D_{r,y} \partial_{y_2} \right) \langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle \\ T_3 = \partial_{y_1} \left\langle \tilde{v}_{y_1} \widetilde{U_1 U_2} \right\rangle &= -\partial_{y_1} \left(D_{y,r} \partial_{r_1} + D_{y,r} \partial_{r_2} + D_{y,y} \partial_{y_1} + D_{y,y} \partial_{y_2} \right) \langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle \\ T_4 = \partial_{y_2} \left\langle \tilde{v}_{y_2} \widetilde{U_1 U_2} \right\rangle &= -\partial_{y_2} \left(D_{y,r} \partial_{r_1} + D_{y,r} \partial_{r_2} + D_{y,y} \partial_{y_1} + D_{y,y} \partial_{y_2} \right) \langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle \end{aligned}$$

考虑到本章研究的是一个两点关联函数的问题, 我们可以将上述项中仅与 y 方向导数相关的那些项转化到相对坐标系中, 从而利用极向平均后的量具有对称性这一性质 (即 $\partial_{y_+} \langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle = 0$)。

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \frac{r_1 \pm r_2}{2}, & \frac{\partial}{\partial r_{1,2}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r_+} \pm \frac{\partial}{\partial r_-} \right) \\ y_{\pm} &= \frac{y_1 \pm y_2}{2}, & \frac{\partial}{\partial y_{1,2}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_+} \pm \frac{\partial}{\partial y_-} \right) \end{aligned}$$

那么对下面的例子有

$$\begin{aligned} & \partial_{y_1} D_{1,1}^{y,y} \partial_{y_1} + \partial_{y_1} D_{1,2}^{y,y} \partial_{y_2} + \partial_{y_2} D_{2,1}^{y,y} \partial_{y_1} + \partial_{y_2} D_{2,2}^{y,y} \partial_{y_2} \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(\partial_{y_+} - \partial_{y_-} \right) D_{1,1}^{y,y} \left(\partial_{y_+} - \partial_{y_-} \right) + \left(\partial_{y_+} - \partial_{y_-} \right) D_{1,2}^{y,y} \left(\partial_{y_+} + \partial_{y_-} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\partial_{y_+} + \partial_{y_-} \right) D_{2,1}^{y,y} \left(\partial_{y_+} - \partial_{y_-} \right) + \left(\partial_{y_+} + \partial_{y_-} \right) D_{2,2}^{y,y} \left(\partial_{y_+} + \partial_{y_-} \right) \right] \\ & \approx \frac{1}{4} \partial_{y_-} \left(D_{1,1}^{y,y} + D_{2,2}^{y,y} - D_{1,2}^{y,y} - D_{2,1}^{y,y} \right) \partial_{y_-} \end{aligned}$$

于是有 $T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = T_r + T_{y_-} + T_{\text{cross}}$ 。在这里, T_r 指代所有仅与 r 方向上导数相关的那些项, 而 T_{y_-} 则仅包含 y_- 方向上导数相关的项, 最后 T_{cross} 中的项包含两个方向上的导数。在 T_{cross} 中, 我们可以提取出类似于 $D_{1,2}^{r,y} - D_{1,1}^{r,y} + D_{2,2}^{r,y} - D_{2,1}^{r,y}$ 或者 $D_{1,1}^{y,r} + D_{1,2}^{y,r} - D_{2,2}^{y,r} - D_{2,1}^{y,r}$ 的项, 它们在 $1 \rightarrow 2$ 时都会趋于 0。所以所有的交叉项都趋于 0。最后关于 $\langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle$ 的方程 (3.6) 转化为:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle + T_r(1,2) + T_{y_-}(1,2) &= -\frac{3}{2} \Omega_D \left(\langle \tilde{U}_2 \partial_{y_1} \tilde{T}_i(1) \rangle + \langle \tilde{U}_1 \partial_{y_2} \tilde{T}_i(2) \rangle \right) \\ & \quad + C_i \partial_r (\bar{\Delta} \phi_Z) \left(\langle \tilde{U}_2 \tilde{v}_r(1) \rangle + \langle \tilde{U}_1 \tilde{v}_r(2) \rangle \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中定义了,

$$\begin{aligned} T_r(1,2) &= - \left(\partial_{r_1} D_{1,1}^{r,r} \partial_{r_1} + \partial_{r_2} D_{2,2}^{r,r} \partial_{r_2} + \partial_{r_1} D_{1,2}^{r,r} \partial_{r_2} + \partial_{r_2} D_{2,1}^{r,r} \partial_{r_1} \right) \langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle \\ T_{y_-}(1,2) &= -\frac{1}{4} \partial_{y_-} \left(D_{1,1}^{y,y} + D_{2,2}^{y,y} - D_{1,2}^{y,y} - D_{2,1}^{y,y} \right) \partial_{y_-} \langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle \end{aligned}$$

方程 (3.10) 正是本章需要的关于两点关联函数 $\langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle$ 的演化方程。依照本章开头给出的研究路线, 我们将利用该演化方程得到 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 的演化方程。

3.1.3 非线性项的简化: 准线性闭包

在本小节将给出 T_r 和 T_{y_-} 的一些简化, 这在后面的推导中会用到。在 $T_r(1,2)$ 的表达式中, 关于 r_- 方向上的导数表征的是关联函数在 r 方向上的分离的依赖性, 这一依赖会随着 $r_- \rightarrow 0$ 而趋于 0。但是关联函数在 r_+ 方向上的导数对平

均分布是敏感的。把所有项中仅与 ∂_{r_+} 上的导数相关的项提取出来得到 $T_r(1, 2) = -\partial_{r_+} D_{r,r} \partial_{r_+} \langle \tilde{U}_1 \tilde{U}_2 \rangle + \dots$ 。对于其中的 $D_{r,r}$ ，当取极限 $r_- \rightarrow 0$ 有

$$\begin{aligned}
 D_{r,r} &= \lim_{r_1 \rightarrow r_2} \left(D_{r,r} + D_{r,r} + D_{r,r} + D_{r,r} \right) \\
 &= \lim_{r_1 \rightarrow r_2} \sum_{k_y} \left[R_{k_y}^{(1)} \left| \tilde{v}_{k_y}(r_1) \right|_r^2 + R_{k_y}^{(2)} \left| \tilde{v}_{k_y}(r_2) \right|_r^2 \right. \\
 &\quad \left. + R_{k_y}^{(2)} \tilde{v}_{-k_y}(r_1) \tilde{v}_{k_y}(r_2) e^{ik_y(y_2 - y_1)} + R_{k_y}^{(1)} \tilde{v}_{-k_y}(r_2) \tilde{v}_{k_y}(r_1) e^{ik_y(y_1 - y_2)} \right] \\
 &= 2 \sum_{k_y} R_{k_y} k_y^2 |\tilde{\phi}_k|^2 (1 + \cos(k_y y_-)) \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

这是一个关于 k_y 的求和，其值取决于 $\langle \tilde{\phi}_k^2 \rangle$ 在 k_y 上的分布。在接下来的讨论中，可以看到 $D_{r,r}$ 的近似值取决于 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 在 y_- 方向上的展开。为了表征这种展开，可以定义一个二阶矩：

$$\langle y_-^2 \rangle = \frac{\int y_-^2 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle (r, y_-) dy_-}{\int \langle \tilde{\phi}^2 \rangle (r, y_-) dy_-}$$

考虑 $\langle y_-^2 \rangle$ 的两种情况：

- 当大多数 $\langle \tilde{\phi}_k^2 \rangle (r, y_-)$ 开始在 y_- 上延展时（即 $\langle y_-^2 \rangle \rightarrow 0$ ），在公式 (3.11) 中，求和的贡献将会主要集中在 $k_y y_- \sim 0$ 的那些项上，从而近似地有 $\cos(k_y y_-) \approx 1$ 。
- 当考虑 $\langle \tilde{\phi}_k^2 \rangle (r, y_-)$ 主要都是延展较大的 y_- 时（即 $\langle y_-^2 \rangle > 1$ ），求和的贡献将集中在那些 $k_y y_- > 1$ 的 $\langle \tilde{\phi}_k^2 \rangle (r, y_-)$ 项上，近似地说 $\cos(k_y y_-)$ 将快速地震荡。于是可以认为公式 (3.11) 中关于 $\cos(k_y y_-)$ 的求和将会抵消。

归纳起来，对公式 (3.11)，有如下近似：

$$D_{r,r} \approx \begin{cases} 4D_0 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle, & \text{when } \langle y_-^2 \rangle \rightarrow 0, \\ 2D_0 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle, & \text{when } \langle y_-^2 \rangle > 1. \end{cases}$$

此处定义 $D_0 = \sum_{k_y} R_{k_y} k_y^2 |\tilde{\phi}_k|^2 / \langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 。

对 T_{y_-} 和 $D_{y,y}$ 也可以有同样的近似。我们让 $r_- \rightarrow 0$ ，但是保留了对 y_- 的依赖，

$$\begin{aligned}
 D_{y,y} &= \lim_{r_1 \rightarrow r_2} \left(D_{y,y} + D_{y,y} - D_{y,y} - D_{y,y} \right) \\
 &\approx 2 \sum_{k_y} R_{k_y} |\tilde{\phi}_k|^2 \frac{k_y^2}{k_y^2 l_r^2} (1 - \cos(k_y y_-))
 \end{aligned}$$

这里的 l_r 是模式的相关长度，大小大概在几个 ρ_i 附近。当 $\langle y_-^2 \rangle \rightarrow 0$ 时，有 $1 - \cos(k_y y_-) \simeq (k_y y_-)^2 / 2$ ，以至于上式在求和后剩余 $\langle y_-^2 \rangle$ 。另一方面，当 $\langle y_-^2 \rangle > 1$ 时，

关于 $\cos k_y y_-$ 的求和抵消。归结起来, 结果为:

$$D_{y,y} = \begin{cases} D_0 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \frac{\langle y_-^2 \rangle}{l_r^2}, & \text{when } \langle y_-^2 \rangle \rightarrow 0, \\ 2D_0 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \frac{1}{\bar{k}_y^2 l_r^2}, & \text{when } \langle y_-^2 \rangle > 1. \end{cases}$$

可以注意到 $D_{r,r}$ 和 $D_{y,y}$ 都取决于 $\langle y_-^2 \rangle$ 的尺度大小。如果 $\langle \tilde{\phi}_k^2 \rangle$ 一开始只具有一个很小的 y_- 上延展 (这同时对应于 $\langle y_- \rangle = 0$ 和 $\langle y_-^2 \rangle \rightarrow 0$)。那么演化方程将会给出

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle y_-^2 \rangle = \frac{\int y_-^2 \frac{\partial}{\partial y_-} D_{y,y} \frac{\partial}{\partial y_-} \langle \tilde{\phi}^2 \rangle dy_-}{\int \langle \tilde{\phi}^2 \rangle (r, y_-) dy_-} \sim 2 \frac{\int D_{y,y} \langle \tilde{\phi}^2 \rangle dy_-}{\int \langle \tilde{\phi}^2 \rangle (r, y_-) dy_-} \propto 2D_0 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \frac{\langle y_-^2 \rangle}{l_r^2}$$

将上面的式子在时间上积分, 得到

$$\langle y_-^2 \rangle \propto \exp \left(2D_0 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \frac{t}{l_r^2} \right)$$

这代表着当 $\langle y_-^2 \rangle$ 较小时, $\langle y_-^2 \rangle$ 将会在 y_- 上随时间指数增长, 直到 y_- 达到数个 $1/\bar{k}_y$ 大小。结果最终的 $D_{r,r}$ 和 $D_{y,y}$ 都将处于 $\langle y_-^2 \rangle$ 较大的情形。所以在本章之后的推导中, 主要关注较大 $\langle y_-^2 \rangle$ 的情形, 即对应于输运系数:

$$D_{r,r} = 2D_0 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \quad (3.12)$$

$$D_{y,y} = 2D_0 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \frac{1}{\bar{k}_y^2 l_r^2} \quad (3.13)$$

回到本章前述的研究路线, 我们下一步需要将格林函数作用在方程 (3.10) 上, 以得到关联函数 $\langle \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2 \rangle$ 的演化方程。

3.1.4 从涡量拟能 $\langle \tilde{U}^2 \rangle$ 到电势强度 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 演化

基于方程 (3.10), 我们对其中的 \tilde{U}^2 应用双格林函数, 然后取极限 $r_1 \rightarrow r_2$, 进而得到 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 的演化方程。在方程 (3.3) 和 (3.10) 中用到的格林函数是基于公式 (3.2) 的傅里叶逆变换得出的:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x) &= \frac{1}{\delta_b^2} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{A+k^2} \right\} = \frac{\sqrt{A}}{2} e^{-\sqrt{A}|x|} \\ \mathcal{G}(x, x') &= \frac{\sqrt{A}}{2} e^{-\sqrt{A}|x-x'|} \end{aligned} \quad (3.14)$$

其中, $A = C_e / (C_i \delta_b^2) = \tau / (\sqrt{2\varepsilon_0} \delta_b^2) \sim \delta_b^{-2}$ 。而 δ_b 是香蕉轨道宽度, 它将小于 δ_b 的结构平均掉。所以任何同该格林函数卷积的结构必然大于 δ_b 的尺度。

我们首先处理方程 (3.10) 等号右边的项。和带状流相关的那些项可能限制湍流传播^[16, 21, 73], 为了简化研究, 在本章之后的内容中, 我们忽略与带状电势的相

相互作用。至于同温度扰动和曲率漂移相关的项，将它们与双 Green 函数卷积后，有如下关系：

$$\begin{aligned} & \frac{A}{4} \iint e^{-\sqrt{A}(|r'_1-r_1|+|r'_2-r_2|)} \left(\langle \tilde{U}_2, \partial_{y_1}, \tilde{T}_1 \rangle + \langle \tilde{U}_1, \partial_{y_2}, \tilde{T}_2 \rangle \right) dr'_1 dr'_2 \\ &= \frac{\sqrt{A}}{2} \left(\int e^{-\sqrt{A}|r'_1-r_1|} \langle \tilde{\phi}_2 \partial_{y_1}, \tilde{T}_1 \rangle dr'_1 + \int e^{-\sqrt{A}|r'_2-r_2|} \langle \tilde{\phi}_1 \partial_{y_2}, \tilde{T}_2 \rangle dr'_2 \right) \end{aligned}$$

其中的格林函数会将 \tilde{U} 转化为 $\tilde{\phi}$ 。对上式取极限给出下面的式子。由于上式中的括号是对 y_+ 方向上做的平均，可以做分部积分，从而有，

$$2 \frac{\sqrt{A}}{2} \int e^{-\sqrt{A}|r'-r|} \langle \tilde{\phi} \partial_y \tilde{T} \rangle dr = \sqrt{A} \int e^{-\sqrt{A}|r'-r|} \langle \tilde{v}_r \tilde{T} \rangle dr' \quad (3.15)$$

这代表了热通量 $\langle \tilde{v}_r \tilde{T} \rangle$ 对 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 的分布式泵浦。我们称之为非局域增长。由于非局域卷积核具有几个 δ_b 的宽度，从而使得 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 在 r 一个点处的增长受到宽度为 δ_b 的一个区域的影响。

不过需要强调的是，因为 $\delta_b/L_T \ll 1$ ，所以在里得到的仍然是一个较为中等的非局域效应。这样的非局域增长的存在有两个条件：

- 一是磁场的曲率的存在，使得捕获离子轨道和离子进动存在。
- 二是捕获离子的极化电荷效应，导致了温度扰动的散布。

在时间尺度 $\tau > \tau_b$ 上，这些效应将导致非局域增长，其中， τ_b 是捕获离子回弹时间。对方程 (3.10) 等号左边的 T_r 项应用双格林函数，结果为：

$$\iint \mathcal{G}(x_1, x'_1) \mathcal{G}(x_2, x'_2) T_r(1', 2') dx'_1 dx'_2$$

由于 $l_s > \delta_b$ （即，关联函数的尺度超过了香蕉轨道宽度）我们可以将 $T_r(1', 2')$ 在点 x_1 和 x_2 附近展开为：

$$\begin{aligned} T_r(1', 2') &= T_r(1, 2) + \left[(r'_1 - r_1) \frac{\partial}{\partial r_1} + (r'_2 - r_2) \frac{\partial}{\partial r_2} \right] T_r(1, 2) \\ &+ \frac{1}{2} \left[(r'_1 - r_1)^2 \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + (r'_2 - r_2)^2 \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} + 2(r'_1 - r_1)(r'_2 - r_2) \frac{\partial}{\partial r_1} \frac{\partial}{\partial r_2} \right] T_r(1, 2) + \dots \\ &= \sum_{m=0, n=0}^{\infty} \frac{T_r^{(m,n)}}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)} (r_1 - r'_1)^m (r_2 - r'_2)^n \end{aligned}$$

这里的 $\Gamma(m+1) = m!$ 是伽马函数， m 是一个整数，并且有

$$\begin{aligned} T_r^{(m,n)} &\equiv C_{m+n}^m \partial_{r_1}^m \partial_{r_2}^n T_r(1, 2) \\ &= \frac{C_{m+n}^m}{2^{m+n}} \partial_{r_+}^{m+n} T_r(1, 2) + \dots \end{aligned}$$

另外, 在后面的推导中将会用到如下关于组合数 C_{m+n}^m 的一些公式:

$$\sum_{m=0}^{m+n} C_{m+n}^m = 2^{m+n}, \quad (3.16)$$

$$\sum_{\substack{m=0, \\ \text{mod}(m,2)=0}}^{m+n} C_{m+n}^m = 2^{m+n-1}, m+n \neq 0 \quad (3.17)$$

当格林函数卷积被作用到 $T_r(1, 2)$ 上时, 因为卷积核本身是一个在 r 上的偶函数, 所以只有那些同时满足 m 和 n 为偶数的项才能在积分中保留下来。于是,

$$\begin{aligned} & \frac{A}{4} \iint e^{-\sqrt{A}|r'_1-r_1|-\sqrt{A}|r'_2-r_2|} T_r(1', 2') dr'_1 dr'_2 \\ &= \frac{A}{4} \sum_{m=0, n=0}^{\infty} \frac{T_r^{(m, n)}}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)} \iint e^{-\sqrt{A}(|r'_1-r_1|+|r'_2-r_2|)} (r_1-r'_1)^m (r_2-r'_2)^n dr'_1 dr'_2 \\ &= \frac{A}{4} \sum_{\substack{m=0, n=0 \\ \text{mod}(m,2)=0 \\ \text{mod}(n,2)=0}}^{\infty} \frac{C_{m+n}^m}{2^{m+n}} \partial_{r_+}^{m+n} T_r(1, 2) \frac{2}{A^{\frac{m+1}{2}}} \frac{2}{A^{\frac{n+1}{2}}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

在上面的推导中, 积分结果被伽马函数抵消。重写 $k \equiv m+n$ 并利用公式 (3.17), 则上式可以重写为:

$$\frac{1}{2} T_r(1, 2) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ \text{mod}(k,2)=0}}^{\infty} \frac{1}{A^{\frac{k}{2}}} \partial_{r_+}^k T_r(1, 2) = \frac{1}{2} T_r(1, 2) + \frac{\sqrt{A}}{4} \int e^{-\sqrt{A}|r'_+-r_+|} T_r(1', 2') dr'_+$$

或者等效地,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathcal{G}(r_+) \otimes \right) T_r(1, 2) \quad (3.19)$$

这里我们定义了 $\mathcal{G}(r_+) = \frac{\sqrt{A}}{2} e^{-\sqrt{A}|r_+|}$, 而 $f(x) \otimes g(x) = \int f(x-x')g(x')dx'$ 是一个卷积。在 $T_r(1, 2)$ 中, 关于 r_+ 的依赖是隐式地。在取极限 $r_1 \rightarrow r_2$ 后, $T_r(1, 2)$ 将会导致一个扩散项。因为这个表达式中包含了和公式(3.15)相同的卷积关系, 以至于也同样引入了来自不同空间处的影响, 所以为了和前面的表述保持一致, 我们将表达式 (3.19) 称为 非局域扩散项。再次强调这是一项中等水平的非局域性。

事实上, 动理学准中性方程中的极化电荷项 $\bar{\Delta}\bar{\phi}$ 是一个在 $\delta_b \ll 1$ 时的最低阶的近似^[68]。当 δ_b 不是很小时, 有理由认为卷积核可能不是完全对称的, 以至于卷积积分中 m 和 n 同时为偶整数的条件过于苛刻。基于此, 我们认为, 为了使得积分不为 0, 约束条件 m 和 n 为偶数可以放松为 $m+n$ 为偶数。基于这一想法, 我们

使用下面的表达式而不是 (3.19) 去研究非局域扩散带来的影响。

$$\begin{aligned} \frac{A}{4} \iint e^{-\sqrt{A}|r'_1-r_1|-\sqrt{A}|r'_2-r_2|} T_r(1', 2') dr'_1 dr'_2 &\sim \frac{\sqrt{A}}{2} \int e^{-\sqrt{A}|r'_+-r_+|} T_r(1', 2') dr'_+ \\ &= \mathcal{G}(r_+) \otimes T_r(1, 2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

在这里所有包含对 r_- 导数的项都被忽略了。

下一步是在方程 (3.20) 中取极限 $r_1 \rightarrow r_2$, 利用 \tilde{U} 的定义, 得到

$$\begin{aligned} \langle \tilde{U}(1)\tilde{U}(2) \rangle &\sim \langle (\tilde{\phi}(1) - \delta_b^2 \partial_{r_1}^2 \tilde{\phi}(1)) (\tilde{\phi}(2) - \delta_b^2 \partial_{r_2}^2 \tilde{\phi}(2)) \rangle \\ &= \langle \tilde{\phi}(1)\tilde{\phi}(2) \rangle - \delta_b^2 (\partial_{r_1}^2 + \partial_{r_2}^2) \langle \tilde{\phi}(1)\tilde{\phi}(2) \rangle + \dots \end{aligned}$$

在 $r_1 \rightarrow r_2$ 的极限下, 结合上面的表达式, 得到 T_r :

$$\begin{aligned} \lim_{r_1 \rightarrow r_2} T_r(1, 2) &= - \lim_{r_1 \rightarrow r_2} \left[\frac{1}{4} \partial_{r_+} \left(\begin{matrix} D_{r,r} & D_{r,r} & D_{r,r} & D_{r,r} \\ 1,1 & 2,2 & 1,2 & 2,1 \end{matrix} \right) \partial_{r_+} + \dots \right] \\ &\quad \times \left[\langle \tilde{\phi}(1)\tilde{\phi}(2) \rangle - \frac{\delta_b^2}{2} \partial_{r_+}^2 \langle \tilde{\phi}(1)\tilde{\phi}(2) \rangle + \dots \right] \\ &= -\partial_{r_+} D_{r_+, r_+} \partial_{r_+} \left[\langle \tilde{\phi}^2 \rangle - \frac{\delta_b^2}{2} \partial_{r_+}^2 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

把上面的 T_r 代入方程 (3.20), 再代入热通量驱动 (3.15), 我们最终得到了 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 的演化方程, 这里我们用 r 替换了 r_+ 。结果是:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \tilde{\phi}^2 \rangle &= \frac{\sqrt{A}}{2} \int e^{-\sqrt{A}|r'-r|} \frac{\partial}{\partial r'} \left[2D_0 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \frac{\partial}{\partial r'} \left(\langle \tilde{\phi}^2 \rangle - \frac{\delta_b^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r'^2} \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \right) \right] dr' \\ &\quad - 3\Omega_D \frac{\sqrt{A}}{2} \int e^{-\sqrt{A}|r'-r|} \langle \tilde{v}_r \tilde{T} \rangle (r') dr' + \frac{1}{2} \partial_{y_-} D_{y,y} \partial_{y_-} \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \end{aligned} \quad (3.22)$$

如果在上面的方程的基础上, 忽略所有非局域项、 δ_b 相关的项, 那么可以得到:

$$\partial_t \langle \tilde{\phi}^2 \rangle = \frac{\partial}{\partial r} D_{r,r} \frac{\partial}{\partial r} \langle \tilde{\phi}^2 \rangle - 3\Omega_D \langle \tilde{v}_r \tilde{T} \rangle + \frac{1}{2} \partial_{y_-} D_{y,y} \partial_{y_-} \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \quad (3.23)$$

回忆人们常常使用的针对对弱湍流的简单湍流自扩散模型^[15, 16, 20]:

$$\partial_t \mathcal{E} = \partial_x [(D_0 \mathcal{E}) \partial_x \mathcal{E}] - \gamma_{NL} \mathcal{E}^2 + \gamma \mathcal{E} = 0 \quad (3.24)$$

其中 \mathcal{E} 是湍流拟能^[74]。可以看到方程 (3.23) 和 (3.24) 之间的相似性, (3.23) 具体到每一项都可以回归到传统模型。对方程 (3.23) 中的通量项, 如果采用近似 $D_{r,r} = 2D_0 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle$, 正如前一节中的表达式 (3.12), 那么可以得到

$$\Gamma(\langle \tilde{\phi}^2 \rangle) \sim 2D_0 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \partial_r \langle \tilde{\phi}^2 \rangle$$

这样就恢复了简单模型中的通量。进一步, 利用前一节文中的表达式 (3.13) 给出

的 $D_{y,y} = 2D_0 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle / (\bar{k}_y^2 l_r^2)$, 这里我们认为 $\partial_{y_-} \sim i\bar{k}_y$, 那么有,

$$\partial_{y_-} D_{y,y} \partial_{y_-} \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \propto -\frac{2D_0}{l_r^2} \langle \tilde{\phi}^2 \rangle^2$$

上式给出了在 $r_- \rightarrow 0$ 条件下仍然存在的局域性耗散。这对应于传统简单模型中的局域非线性耗散 $-\gamma_{NL} \mathcal{E}^2$ 。然后用线性增长代替热通量驱动项:

$$\langle \tilde{v}_r \tilde{T} \rangle \sim -\langle \tilde{\phi}^2 \rangle \partial_r \langle T \rangle \sim -\gamma_L \langle \tilde{\phi}^2 \rangle$$

我们在这里已经假设了 $\partial_r \langle T \rangle \sim \langle T \rangle / L_T > 0$, 并且 $\gamma \propto \langle T \rangle / L_T$ 。最后, 综合以上的陈述得到如下方程:

$$\partial_t \langle \tilde{\phi}^2 \rangle = \frac{\partial}{\partial r} \left(2D_0 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \frac{\partial}{\partial r} \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \right) + \gamma_L \langle \tilde{\phi}^2 \rangle - \frac{D_0}{l_r^2} \langle \tilde{\phi}^2 \rangle^2 \quad (3.25)$$

方程 (3.25) 包含了最基本的非线性扩散、局域增长和耗散, 具有和常规的湍流自扩散模型 (3.24) 相同的形式^[16, 20]。不过同时也注意到此处的模型和经典模型之间的不同。最明显的区别是, 我们的模型研究的是 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 的演化, 而经典模型研究的是湍流能量 \mathcal{E} 。同时, 很重要的一点是, 我们通过保留在 y_- 上的扩散而得到了耗散项, 通过曲率漂移得到了增长项。这些新的结果加深了我们对传统模型中的物理的理解。

方程 (3.25) 是在忽略所有与 δ_b 相关的项的条件下 ($\delta_b \ll 1$) 得到的。当我们重新补全所有之前暂时忽略的非局域项后, 可得,

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \tilde{\phi}^2 \rangle = \mathcal{G} \otimes \frac{\partial}{\partial r} \left[2D_0 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \frac{\partial}{\partial r} \left(\langle \tilde{\phi}^2 \rangle - \frac{\delta_b^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \right) \right] \\ + \mathcal{G} \otimes (\gamma_L(r) \langle \tilde{\phi}^2 \rangle) - \frac{D_0}{l_r^2} \langle \tilde{\phi}^2 \rangle^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

上述方程 (3.26) 同时包含非局域扩散 (等号右边第一项) 和非局域增长 (等号右边第二项)。因为它们都包含卷积, 并在空间上引入了 $r' \neq r$ 的贡献, 所以本文将它们统称为非局域效应。这些显式的非局域效应在效果上是较为中等的, 但是可以为湍流自扩散带来巨大的不同。这些非局域效应是我们的模型和传统模型 (3.24) 相比另一个重要的不同点。在表3.1中比较了不同模型之间的差异, 即本章中的模型 (3.26)、传统模型 (3.24)、Dupree 的两点相关模型^[75]。

我们可以将方程 (3.25) 无量纲化:

$$t \rightarrow \frac{\hat{t}}{\gamma_L}, \quad r \rightarrow \hat{r} L_T, \quad \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \rightarrow \hat{I} \frac{\gamma_L}{\gamma_{NL}}$$

这里用到了一个恒定的线性增长率 γ_L , 那么 γ_L / γ_{NL} 便是 $\langle \tilde{\phi} \rangle$ 的饱和水平。之后得

表 3.1 模型 (3.26) 和传统模型、Dupree 的两点关联理论^[75]的比较

	Conventional models	Yan & Diamond	Dupree
Quantity I	$\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ in Ref. ^[16] . Turbulence energy \mathcal{E} in Ref. ^[20] N_k and K_k in Ref. ^[21]	$\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$	$\langle \tilde{f}_1 \tilde{f}_2 \rangle$
Spatial	r	r_+, y_-	r_-
$D(I)$	$\simeq D_0 \varepsilon^\alpha$	$D_0 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle$	D_{rel}
γ_L	Local	Nonlocal	-
γ_{NL}	Coupling to small structure	Expansion in y_- , $D_0 l_r^2$	-
Δ_p depends on	$\sim \sqrt{2D_0/\gamma_{\text{NL}}}$	l_r, δ_b	-
Derivation	Phenomenology in Ref. ^[16] Fokker-Planck and QL in Ref. ^[20]	2-p corr., Green's function	2-p corr.

到如下方程:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \hat{I} = \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(2\hat{D}_0 \hat{I} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \hat{I} \right) + \hat{I} - \hat{I}^2 \quad (3.27)$$

其中,

$$\hat{D}_0 = \frac{D_0}{L_T^2 \gamma_{\text{NL}}} = \frac{D_0 l_r^2}{L_T^2 D_0} = \frac{l_r^2}{L_T^2}$$

l_r 的尺度粗略估计应当近似于 ρ_i 并且受到 δ_b 的限制。在方程 (3.13) 中, 由于缺乏对谱的详细计算 (难度较高!), 所以在这里将其设置为接近离子回旋半径, 即, $l_r \sim \rho_i$ 。这同时意味着输运系数将会遵循回旋玻姆定标率 $\hat{D}_0 \simeq (\rho/L_T)^2$ 。这样在方程 (3.27) 中, 将会只有一个参数, 即模式的相关长度 $l_{r*} \equiv l_r/L_T$, 而其正比于 $\rho_* \equiv \rho_i/L_T$ 。而针对修正后的模型方程 (3.26), 我们也可以做无量纲化, 结果如下:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \hat{I} = \mathcal{G} \otimes \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left[2\hat{D}_0 \hat{I} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{I} - \frac{\delta_{b*}^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \hat{r}^2} \hat{I} \right) \right] + \mathcal{G} \otimes \hat{I} - \hat{I}^2 \quad (3.28)$$

这里的 δ_{b*} 已经对 L_T 作了归一化。

方程 (3.28) 较为复杂, 可以通过两种不同的方法去简化近似它, 即仅保留非局域扩散项, 如 (3.29a); 或仅保留非局域增长项, 如 (3.29b)。当然, 完全的简化会给出方程 (3.27)。

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \hat{I} = \mathcal{G} \otimes \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left[2\hat{D}_0 \hat{I} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{I} - \frac{\delta_{b*}^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \hat{r}^2} \hat{I} \right) \right] + \hat{I} - \hat{I}^2 \quad (3.29a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \hat{I} = \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(2\hat{D}_0 \hat{I} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \hat{I} \right) + \mathcal{G} \otimes \hat{I} - \hat{I}^2 \quad (3.29b)$$

在上面的模型中，我们看到了第二个控制参数 δ_{b*} 。等效地来说，可以重新缩放坐标 r 为 $r = \hat{r}\delta_b/L_T^2$ ，从而使得在方程 (3.28) 中仅剩的控制参数为 $\hat{D}_0 = D_0 l_r^2/\delta_b^2$ 。于是有 l_{r*} 以及比例 δ_{b*}/l_{r*} 为模型中的控制参数。改变装置尺寸或 L_T ，而不改变 δ_{b*} 和 l_{r*} ，那么结果将只是等效地缩放坐标。

为了了解哪种近似更合理有效，需要比较两种简化模型 (3.27) 和 (3.28) 在湍流自扩散的结果上的差异。具体来说，我们致力于在本章的剩余部分中回答下面几个问题：

1. 这些非局域项是如何影响湍流自扩散的锋面的形成和传播的？
2. 更重要的是，这些非局域项如何影响湍流到线性稳定区域的浸润深度？在这里我们可以期望看到两种非局域效应都会使得传播锋面的展宽和传播速度的增大，并且将有更深的浸润深度。
3. 一个关键的问题是：哪一种非局域效应更强？非局域扩散还是非局域增长？这里我们要比较原始模型 (3.28) 和两个简化模型 (3.29a) 和 (3.29b) 在效果上的差异。
4. 最后一个问题是，这些非局域效应如何影响输运？

值得注意的是，如果我们在上述模型中不使用卷积，仅仅将卷积展开为一系列高阶导数近似的话，那么数值上得到的结果将会产生负值和锋面波动。所以使用卷积可以得到更好的结果。下面对卷积展开近似这种方法给出一个简单的讨论。

卷积的展开近似

只要初始值为正，卷积形式将保持值为正数。但是在本文研究的模型中，如果通过高阶导数展开来近似卷积则可能导致强度值出现负值。从模型 (3.26) 出发，考虑到卷积可以写为一个算符：

$$\left(\int_0^\infty e^{-|r|/\delta_b} \right) \otimes \Rightarrow 1 + \delta_b^2 \partial_r^2 + \delta_b^4 \partial_r^4 + \dots \Rightarrow 1 - \delta_b^2 m_r^2 + \delta_b^4 m_r^4 - \dots \quad (3.30)$$

这里我们用 m_r 代表 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 的波数，以示同 $\tilde{\phi}$ 的波数 k 区分。于是模型 (3.26) 可以写成：

$$\begin{aligned} -i\omega \langle \tilde{\phi}^2 \rangle_{m_r} &= (1 - \delta_b^2 m_r^2 + \delta_b^4 m_r^4 - \dots) \\ &\times \left(\gamma_L \langle \tilde{\phi}^2 \rangle_{m_r} - 2D_0 m_r^2 \left(1 + \frac{\delta_b^2}{2} m_r^2 \right) \langle \tilde{\phi}^2 \rangle_{m_r}^2 \right) - \frac{D_0}{l_r^2} \langle \tilde{\phi}^2 \rangle_{m_r}^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

让 $\omega = \omega_R + i\gamma_{\text{total}}$, 其中包含了实数部分和总的增长率。因为 $m_r \sim l_s^{-1}$ 以及 $l_s > \delta_b$, 我们可以尝试用不同阶数 $\delta_b^2 m_r^2$ 的项来近似卷积。例如, 0 阶近似给出:

$$\gamma_{\text{total}}^{(0)} = \gamma_L - \left(2D_0 m_r^2 + \frac{D_0}{l_r^2} \right) \langle \tilde{\phi}^2 \rangle_{m_r} \quad (3.32)$$

这对应于通常的湍流自扩散模型所描述的图像: $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 的演化受到线性增长率 γ_L 的激发然后在足够大的正的 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 值时饱和。如果引入下一阶 (2 阶) 的近似, 可以得到

$$\gamma_{\text{total}}^{(0)} + \gamma_{\text{total}}^{(2)} = \gamma_L - \left(2D_0 m_r^2 + \frac{D_0}{l_r^2} \right) \langle \tilde{\phi}^2 \rangle_{m_r} - \delta_b^2 m_r^2 \gamma_L + \delta_b^2 D_0 m_r^4 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle_{m_r} \quad (3.33)$$

上式中等号右侧的第三项来自于对卷积和增长率项的近似, 其对饱和机制没有破坏。但是等号右侧的第四项可能破坏饱和机制, 尤其是对正的 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle_{m_r}$ 在 m_r 足够大时。同时对于一个负的 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle_{m_r}$ 系统也有可能饱和, 从而使得 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 的演化中可以出现负值。当我们继续增加近似的阶数, 可得,

$$\gamma_{\text{total}}^{(4)} = \delta_b^4 m_r^4 \gamma_L - \delta_b^4 D_0 m_r^6 \langle \tilde{\phi}^2 \rangle_{m_r} \quad (3.34)$$

上式中的第二项似乎可以解决前面提到的问题, 但是却需要引入 6 阶导数, 以及更精细的网格。简单来说, 模型 (3.26) 中的非局域非线性扩散项导致了强度可能出现负值, 而我们在之后也可以看到, 当非局域扩散项在非局域增长存在时, 这一项完全可以简化为通常的局域扩散项。出现非局域扩散项是由 $2D_0 m_r^2 (1 + \frac{\delta_b^2}{2} m_r^2) \langle \tilde{\phi}^2 \rangle_{m_r}^2$ 中的系数 1/2 导致的, 而究其原因是我们在推导过程中坚持先计算积分然后取极限 $1 \rightarrow 2$ 。所以使用卷积还是展开近似, 在物理上并不关键。

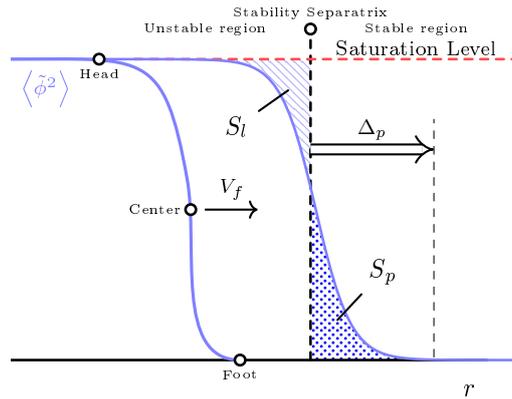


图 3.1 湍流自扩散过程的示意图。可以定义传播锋面的“Head”、“Center”、“Foot”以描述其形状。穿透进入线性稳定区的深度定义为 Δ_p , 等效深度定义为 S_p 。 S_l 是线性不稳定区内损失的湍流强度

3.2 强度方程的数值研究

在前面的章节中, 我们从动理学方程出发推导了通常的扩散模型方程 (3.27), 还有修正后的包含非局域效应的模型方程 (3.28) - (3.29b)。这些模型在非局域性消失时, 回归到经典模型 (3.27) 的形式。模型 (3.27) 在过去已经被广泛研究^[16, 20, 21]。基于这些研究, 我们了解了湍流自扩散的一些基本图像, 如图 3.1 所示。湍流在不稳定区域增长起来, 然后饱和到一个特定的水平, 接着形成一个湍流强度的锋面。锋面将会以一个恒定的速度 V_f 移动。我们可以从图像上基于剖面达到特定的值来定义锋面的“Head”和“Foot”。同时我们定义锋面的最大梯度的位置为“Center”。当锋面到达不稳定区域的边界时, 它将会穿透一定的深度进入到稳定区域。为了分析有多少湍流穿透(浸润)到稳定区域, 我们定义了几个量: Δ_p 是浸润后的锋面的“Foot”所在的位置, 其单位为 L_T ; S_p 是在稳定区域由剖面 and 坐标轴所围的面积, 如图 3.1 所示。

为了回答前一节提出的问题, 我们从数值上研究方程 (3.28) - (3.29b)。我们在空间上使用的是 6 阶有限差分法, 时间上是通常的 4 阶龙格库塔法。空间网格尺寸是 10^{-3} , 时间步长是 10^{-3} (某些算例中小于该值)。方程 (3.27) 中的一个控制参数是 l_r , 即模式的相关长度。在方程 (3.28) 到 (3.29b) 中的另一个参数是香蕉轨道宽度 δ_{b*} 。正如前文中规定的, $l_r \sim \rho_i$, 同时有

$$\rho_* \equiv \frac{\rho_i}{L_T} \sim 10^{-3} \text{ to } 10^{-2} \quad (3.35)$$

其中,

$$\delta_{b*} \equiv \frac{\delta_b}{L_T} \sim \sqrt{\frac{R}{r}} q \rho_* \sim 10 \text{ to } 20 \rho_* \quad (3.36)$$

这里的 q 是安全因子^[2]。

为了实现纽曼边界条件, 我们在边界外引入了虚网格点 u_{-4}, \dots, u_{-1} 和 u_{N+1}, \dots, u_{N+4} , 令

$$u_{-4} = u_4, \dots, u_{-1} = u_1 \quad (3.37)$$

$$u_{N+1} = u_N, \dots, u_{N+4} = u_{N-3}$$

这样的边界条件在应用时效果较好。但是对方程 (3.28) 和 (3.29b) 来说, 由于涉及到非局域增长等卷积项, 这样的边界条件的会带来一定的副作用。不过只要我们将边界设置的离演化中的强度锋面足够远, 这些副作用就不影响我们的研究结论。因为这里使用的有限差分法是 6 阶的, 所以在边界外至少需要三个虚网格点。在实际测试之后, 我们发现为了使得边界稳定, 我们需要至少 4 个虚网格点。于是事实上的边界处在 u_{-1} 和 u_1 之间, 以及 u_N 和 u_{N+1} 之间。

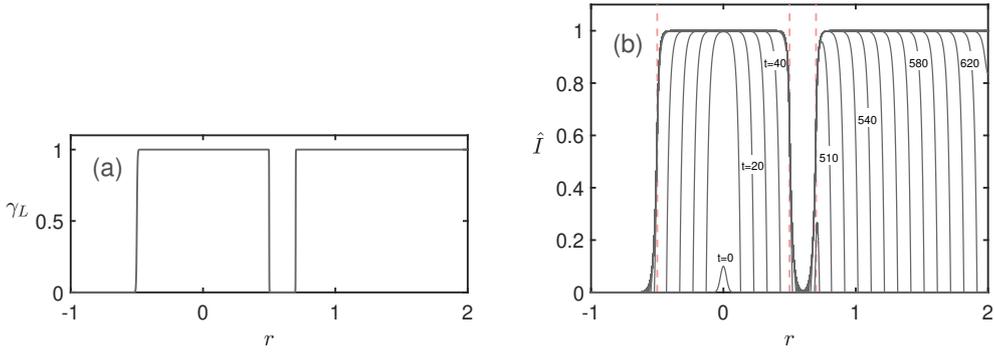


图 3.2 (a) 设定的线性不稳定区间。(b) 方程 (3.27) 在 $l_r = 10^{-2}$ 下的演化, 每个剖面的时间间隔是 10

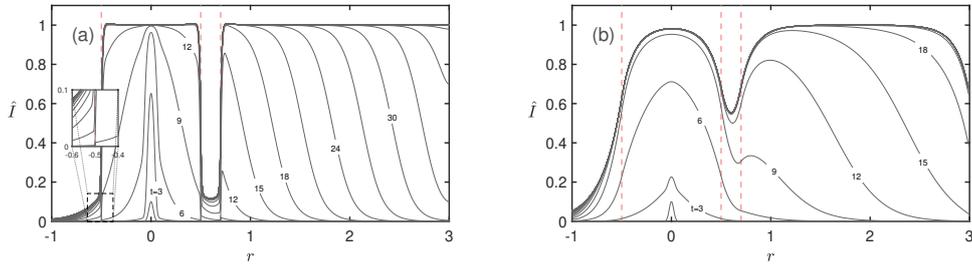


图 3.3 不同方程的演化过程: (a) 方程 (3.29a), 无非局域扩散; (b) 方程 (3.29b), 有非局域增长。 $l_r = \rho_* = 10^{-2}, \delta_{b_*} = 10^{-1}$ 。每个剖面的时间间隔是 3。红色竖线代表线性增长率的分界线。边界条件 (3.37) 在 (a) 中成功地实现了 Neumann 边界条件。在 (b) 中, 非局域增长项和我们的边界设定并不兼容, 不过只要边界离演化中的锋面足够远就不会对锋面的传播和穿透产生影响

为了能对方程 (3.27) 和 (3.28) 之间的差别有一个直观的印象, 我们设定一个如图 3.2(a) 所示的不稳定区域。在该区域分为两部分, 湍流在左侧区域增长起来, 然后穿透浸润到稳定区域, 甚至扩散到右侧的另一个的不稳定区域内。令 $l_{r_*} = \rho_* = 0.01$, $\delta_{b_*} = 0.1$ 。湍流强度的饱和水平为 1, 代表着“回旋玻姆”水平。对方程 (3.27) 来说, 强度剖面在不稳定区域的锋面在“Center”和“Foot”之间几乎不存在可以分辨的距离, 如图 3.2(b)。锋面的传播速度可以用经典的 Fisher-KPP 锋面速度描述^[20], $V_f = \sqrt{2\gamma D}$ 。当取 $\gamma = 1$ 及

$$D = \frac{1}{4} \times 2\hat{D}_0 = \frac{1}{2}l_{r_*}^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

时, 我们有 $V_f = 10^{-2}$ 。从上述方程, 我们也了解到在传统的模型中, $V_f \propto l_{r_*}$ 。 V_f 的这个例子, 为本章之后的研究给出了一个基准和参考。

在参数 $\delta_{b_*} = 0.1$ 的情况下, 锋面演化结果如图 3.3 所示。在图 3.3(a) 中, 方程 (3.29a) 中的卷积核引入了类似于超扩散的效应, 使得 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 的传播锋面变得平滑。结果是, 在图 3.3(a) 中, “Foot”和“Center”之间的距离相较于图 3.2 变得更大。在图 3.3 (b) 中, 我们引入了非局域增长项 (对应于方程 (3.29b)), 结果是湍流的传

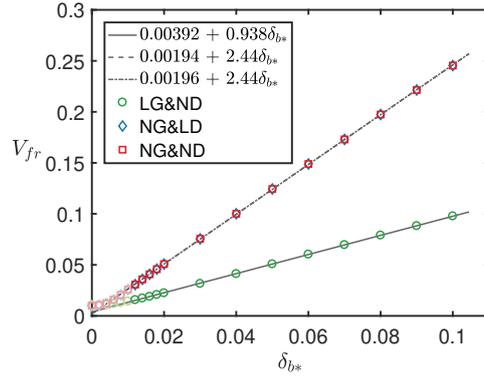


图 3.4 不同模型演化得到的锋面传播速度，固定 $l_{r*} = 0.01$ ，改变 δ_{b*} 。浅色的数据点代表 $\delta_{b*} < l_{r*}$ 的情况，在拟合直线时剔除了（香蕉轨道宽度在物理上不能小于回旋半径）。当 $\delta_{b*} \rightarrow 0$ 时，速度将会回归到 $\sqrt{2\gamma D} = 0.01$ 。来自 NG&ND 和 NG&LD 的数据点基本重合，说明非局域增长项占主导

播速度变得更快，穿透距离更长，锋面宽度也增大。相较于图 3.3(a)，绝对穿透距离也更大了。当我们固定 l_{r*} 的大小，改变 δ_{b*} ，可以预料到更大的 δ_{b*} 对应的是更宽的锋面和更深的穿透。如果计算区域足够宽的话，也能够保持稳定的传播锋面，从而可以研究传播速度和 δ_{b*} 之间的关系，可以预料到 δ_{b*} 越大，传播速度越快。

非局域增长项带来的基本效果并不难理解，因为非局域增长对不稳定区和稳定区的增长率同时采样了，从而使得稳定区域的等效增长率提高，不稳定区域的等效增长率减低。当不稳定区域的宽度较小时，如图 3.3(b) 中的左侧不稳定区域所示，其中的饱和水平将会降低，从而影响其中的输运定标率。然而当不稳定区域的宽度足够大时，从稳定区域的采样效应将会降低，如图 3.3(b) 中的右侧区域所示，饱和水平趋向于 1，并且定标率回到回旋波姆。注意到，当 $\delta_{b*} = 0.1$ 时，图 3.3 中两个不稳定区域之间的小间隔可能是不存在的，所以这里的例子只是起到说明作用。

为了量化地理解非局域修正对模型的影响，我们首先扫描了锋面速度 V_f 和锋面形状在固定 l_{r*} ，变化 δ_{b*} 下的结果。正如我们在上一节中讨论的，控制参数为 l_{r*} 以及 l_r 和 δ_{b*} 的比值，结果显示在图 3.4 和图 3.5 中， δ_{b*} 的范围从 0 到 0.1。我们保留了 $\delta_{b*} < l_{r*}$ 的极限情况以显示结果回归到通常的湍流自扩散模型（即方程 (3.27)）。所有的速度和宽度都是基于在宽的不稳定区域内饱和到 1 的锋面计算的，所以在图 3.4 和图 3.5 不包含系统尺寸的影响。本文使用 NG 代表非局域增长，ND 代表非局域扩散。于是在图 3.4 和图 3.5 中，NG&ND 代表的是方程 (3.28)，LG&ND 代表方程 (3.29a)，NG&LD 则是 (3.29b)。

在图 3.4 中我们首先注意到的当 δ_{b*} 大于 0.01 时，锋面的传播速度将随 δ_{b*} 的增大而近似地线性增大。包含非局域增长项的模型 (3.29b) 和 (3.28) 给出的拟合直

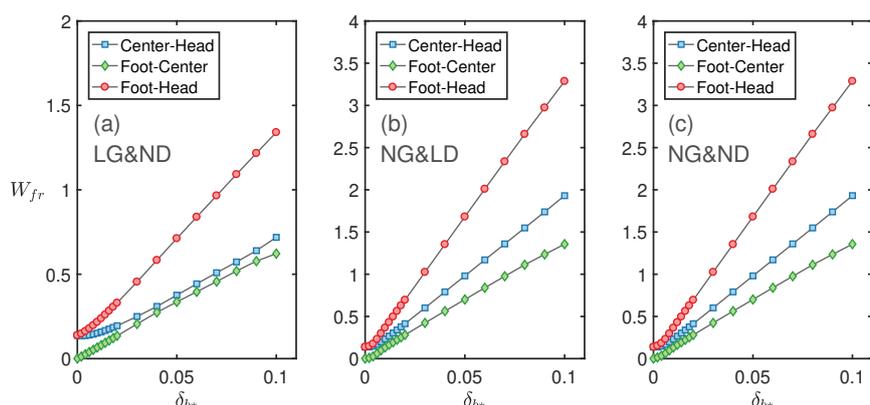


图 3.5 不同方程在固定 $l_{r*} = 10^{-2}$, 变化 δ_{b*} 时产生的传播锋面的情况。非局域效应会以一个正比于 δ_{b*} 的比例展宽锋面形状。当 δ_{b*} 趋于 0 时, 模型退化到传统模型。(b) 和 (c) 中的结果的差异几乎无法分辨, 意味着非局域增长项起到了主要作用

线的斜率明显大于仅包含非局域扩散的模型 (3.29a) 给出的结果。当 $\delta_{b*} < l_{r*}$ 时, 速度逐渐回归到传统模型给出的结果, 所以在拟合时排除了小于 $\delta_{b*} < l_{r*}$ 的点。注意到我们固定了 l_r 的值, 所以速度仅仅与 δ_{b*} 呈线性关系。另一个特性是, 从模型 NG&ND 和 NG&LD 在扫描过程中给出的数据点几乎没有差异。所以我们可以得出结论: 在模型 (3.28) 中锋面速度主要由非局域增长而不是非局域扩散主导。换句话说, 非局域增长的效果要明显强于非局域扩散。

至于锋面的宽度则随着 δ_{b*} 而线性增长, 如图 3.5 所示。注意到模型 (3.28) 和 (3.29b) 的结果 (即图 3.5 中的 NG&LD 和 NG&ND) 几乎有着相同的行为, 只在靠近 $\delta_{b*} \sim 0.01$ 附近有着些许的差异。这一特性, 以及在非局域增长存在时, 速度对于非局域扩散的不敏感性, 说明我们对各项系数受到非局域性影响而延展增大的论述有合理性。

更进一步, 考虑到模型 (3.28) 和 (3.29b) 都具有非局域扩散而不同点仅在于是否有非局域增长, 我们可以得到结论, 在湍流强度锋面的形成上, 非局域增长的效果要远强于非局域扩散。于是在有非局域增长时, 我们可以忽略非局域扩散项。

湍流自扩散的研究中最重要的一个方面就是理解湍流在稳定区域的延展程度。在本文的数值结果中, 浸润 (穿透) 深度 Δ_p 被定义为湍流锋面的根部超过饱和水平 10^{-2} 处的位置。在图 3.6 中, 当锋面穿过分界线, Δ_p 在相对较短的时间内快速增长起来, 然后缓慢地到达一个较为稳定的穿透深度。对仅包含非局域扩散的情形来说, 穿透后的强度剖面可能有着不同的形状。具体来说, 在图 3.6(a) 中, 随着 δ_{b*} 的增长, 强度剖面在靠近分界线 ($r \approx 0.5$) 处降低, 但是同时在 $r \gtrsim 0.6$ 附近又增长。虽然这样的差异可能是微弱的, 我们还是希望引入剖面在稳定区所围的面积 S_p , 以表征等效的穿透深度 (详见示意图 3.1)。在图 3.7 中, 我们扫描了不

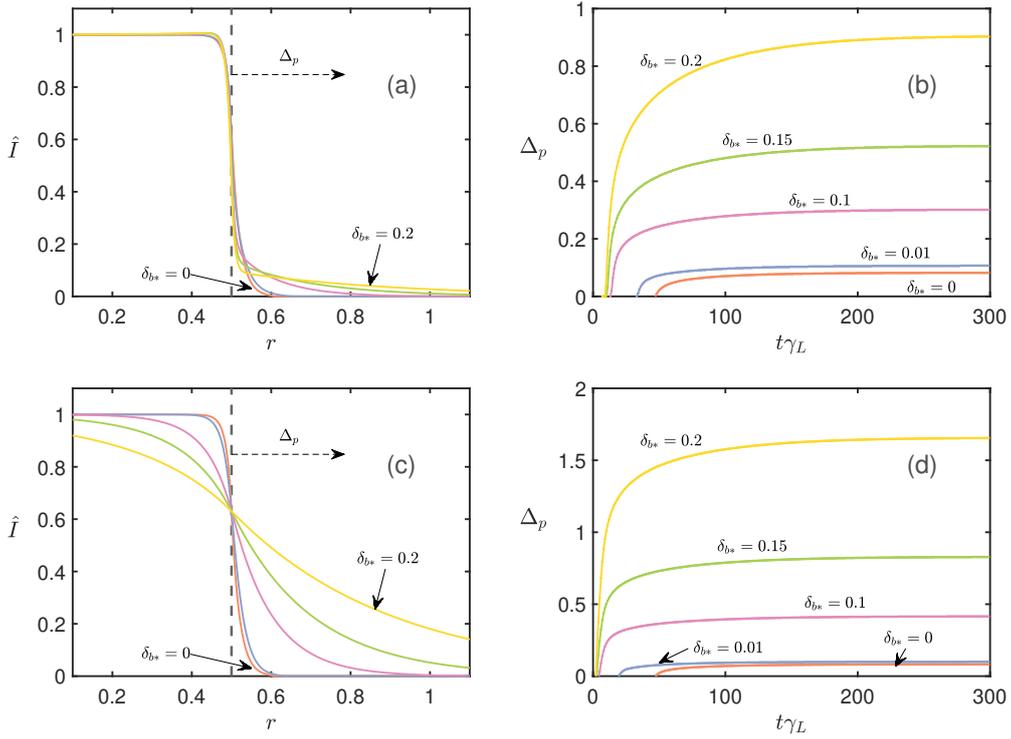


图 3.6 锋面穿透进入稳定区。(a) 和 (b) 对应于方程 (3.29a)，其中没有非局域扩散项。(c) 和 (d) 对应于方程 (3.29b)，其中包含非局域增长项。 δ_{b^*} 在 (0, 0.01, 0.1, 0.15, 0.2) 范围内变化。(a) 和 (c) 为 $t\gamma_L = 300$ 时的锋面

同模型的 Δ_p 和 S_p 在不同 δ_{b^*} 下的结果。当 $\delta_{b^*} > l_{r^*}$ 时， Δ_p 和 S_p 都可以很好地用一条直线 $C\delta_{b^*}$ 去拟合，其中 C 是一个待定常数。所以我们的结论是：

$$\Delta_p, S_p \propto \delta_{b^*} \quad (3.38)$$

上述结论给出的信息十分简单明了：非局域效应增强了湍流到稳定区的自扩散。非局域核的宽度越大，扩散的深度越大。注意到来自模型 NG&ND 的点同来自模型 NG&LD 的点几乎重合。这也说明，非局域增长效应又一次占据主导地位。当我们比较图 3.7(a) 和 (b) 时，注意到虽然来自仅包含非局域扩散的模型的数据有着同非局域增长模型接近的 Δ_p 值，但是在等效穿透深度 S_p 上，还是非局域增长模型的效果更强。回到不稳定区域剩余的湍流份额这个问题上，当我们把区域内的湍流加起来 $\bar{I} \equiv \int \hat{I} dr / L_T$ ，可以发现它遵循一个简单的线性关系：

$$\bar{I} = \bar{I} / l_{r^*}^2 = 1 - \delta_{b^*} \quad (3.39)$$

因为我们规定了 $D(I) = D_0 I$ ，所以输运系数也将遵循相同的规律，如图 3.8。将图 3.8 与前人的结果图 1.3 比较，可以看到一个中等水平的非局域性便可解释 [4, 16, 31] 的模拟中观察到的所谓从“Bohm”到“gyro-Bohm”这一现象。特别是本章从理论上给出的非局域性的形式和 [33] 中猜测的结果具有相同的形式。说明这一结

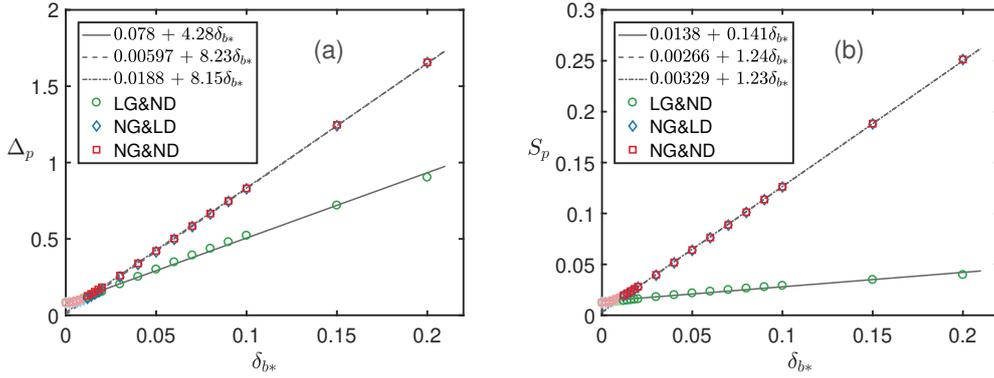


图 3.7 不同方程的 (a) 锋面穿透深度 Δ_p 和 (b) 有效穿透深度 S_p 随 δ_{b^*} 的变化。所有的曲线对应的时间为 $t\gamma_L = 300$ 。在 $\delta_{b^*} > l_{r^*}$ 时，从图中可以得到一个对 Δ_p 和 S_p 的简单的线性拟合关系，浅色点被排除在拟合数据点之外

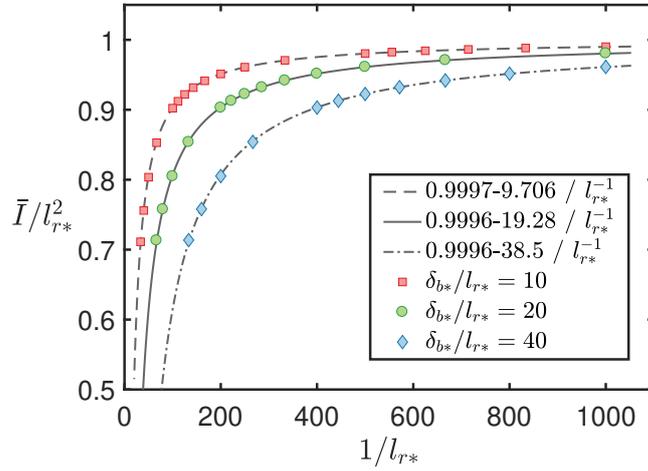


图 3.8 不稳定区内平均湍流强度（输运系数）随 $l_{r^*}^{-1}$ 的变化

果在大型回旋动力学模拟的简化等工作上有潜在的应用。

3.3 小结

在本章，我们针对捕获离子漂移波湍流的 Darnet 模型^[66-68]发展了一套湍流自扩散的理论。理论证明了电势扰动强度的演化是显式非局域的。具体来说，包含以下结果：

1. 推导了势涡 \tilde{U} 的两点关联函数的演化方程；
2. 使用两点准线性法闭合了该方程。并把结果应用到了我们关心的一个问题——湍流自扩散上。这里，我们研究的是两个粒子在中心 r 和相对坐标 $\theta \rightarrow 0$ （即 y_- ）上的演化。而推导出的方程具备通常的 $K - \epsilon$ 模型所需的全部效应；
3. 推导了一个强度演化方程，方法是将势涡 \tilde{U} 转化为电势 $\tilde{\phi}$ 。强度方程(3.26)具

有非局域 Fisher 方程的结构^[76, 77], 形式上为:

$$\partial_t \langle \tilde{\phi}^2 \rangle = \mathcal{G} \otimes [\text{Nonlinear Diffusion}] + \mathcal{G} \otimes (\gamma_L(r) \langle \tilde{\phi}^2 \rangle) - \frac{D_0}{l_r^2} \langle \tilde{\phi}^2 \rangle^2$$

这里的 \mathcal{G} 是一个格林函数, 而 \otimes 代表空间上的卷积;

4. 观察到的一个重要现象是强度方程是显式非局域的, 非局域性的强度由 \mathcal{G} 给出。注意到, 一般而言, 势涡 \tilde{U} 逆转后的尺度决定了非局域性的范围尺度。在这里, 这个尺度较为中等, 即 δ_b ;
5. 显式非局域增长是新模型中的主要新现象;
6. 观察到非局域增长效应增强了强度锋面的传播速度 ($V \simeq (\gamma D)^{1/2}(1 + \delta_b)$), 同时加深了发源于不稳定区域的锋面穿透到稳定区域的深度。该穿透深度遵循简单的规律 $\Delta_p \sim \delta_{b*}$;
7. 而增强后的湍流自扩散趋向于降低不稳定区域的饱和水平。在一个空间上对称的不稳定区域中, 饱和水平遵循定标率 $\tilde{I} = 1 - \delta_{b*}$ 。

从更一般的角度来说, 本章的结果又一次证明了势涡 (potential vorticity) 的应用性, 这一物理量的守恒适用于描述湍流自扩散。同时涡量拟能的引入也得以计算湍流强度的扩散。本章的工作也指出了由于势涡 \tilde{U} 逆转而导致的确实存在的非局域性。这一非局域性的范围由势涡 \tilde{U} 逆转后的卷积核宽度决定。一个有意义的问题是, 相较于原始方程 (3.10), 在我们转化后的方程 (3.22) 中, 是否可能丢失了其非局域性。事实上, 在方程 (3.10) 中, 确实存在着隐式的非局域性, 如 $\langle \tilde{v}_r \widetilde{U_1 U_2} \rangle$ 项, 因为 $\tilde{\phi}$ 和该方程描述的物理量 \tilde{U} 之间存在着非局域的关系。而我们在将 \tilde{U} 逆转为 $\tilde{\phi}$ 后, 将非局域性显式化了。所以在逆转过程中, 可能由于使用了两点准线性近似使得一部分非局域散射效应被截断了。

在本章相关的捕获离子模式扰动情况中, 我们注意到径向非局域性的尺度是由 δ_b 决定的, 所以这项效应是中等的。这一点和通常的认识——湍流输运是弱非局域性的——相吻合。这一非局域性对托卡马克等离子体来说是内秉的: 理论上来说只要处在碰撞率处在香蕉区, 这样的非局域性都应当发挥作用。不过在我们的这一理论中, 从基本物理出发, 确定性地给出了该非局域性的尺度。同时我们注意到, 在系统接近宏观临界时, 势涡 \tilde{U} 逆转的范围有可能增大, 以至于增强非局域性。又或者其他任何可以使得屏蔽效应尺度增强的机制都有可能最终导致这里的非局域输运超出中等水平。最后, 本章关于湍流局域非线性耗散以及格林函数等的主要结论将被应用在下一章中的湍流-剖面演化模型中。

第 4 章 势涡守恒系统应用 2: 剖面台阶

在引言中, 我们介绍了托卡马克中 $E \times B$ 台阶现象的研究现状, 总结出有理论具有唯象、缺乏微观效应、尚待验证等问题。本章将从理论角度研究 $E \times B$ 台阶, 即 $\langle T \rangle$ 和 ϕ_Z 剖面中出现的准周期模式。从第 2 章中的势涡守恒系统可知, 剖面演化由通量决定。我们将从扰动量演化给出准线性通量的表达式, 通量中的输运系数将通过色散模型和谱函数模型进行简化; 所得通量将用于闭合剖面演化方程和拓展的湍流强度演化方程, 从而形成一个湍流-剖面演化系统。在设定边界条件后, 我们研究该湍流-剖面演化系统, 分析其中出现的台阶状模式。

4.1 准线性通量

在第 2 章得出的势涡守恒系统中, 平均剖面随时间的演化遵循下面的方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \langle T \rangle = -\sqrt{2\epsilon_0} \partial_x \langle \tilde{V}_x \tilde{T} \rangle_y \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\Delta \phi_Z] = -\partial_x \langle \tilde{V}_x \Delta \tilde{\phi} \rangle_y \quad (4.2)$$

为了简化记号, 在这里做了改写 $(\psi, \alpha) \rightarrow (x, y)$ 。平均剖面的演化由右侧的通量决定, 可用准线性方法处理这些通量^[74]。因为在势涡守恒系统 (2.9) - (2.12) 中已经包含了所有的扰动量演化方程, 所以我们可以较为容易地得到准线性通量。在具体的推导之前, 我们沿用第 2.4 节的归一化结果, 定义了如下的一些量:

$$\bar{\Omega}_D = \frac{3}{2} \frac{\Omega_D}{C_i}, \omega_{*n} = 0, \tau = \frac{T_i}{T_e} = 1, \tilde{T} = \frac{\tilde{T}_i}{\langle T_i \rangle}, C_e = \frac{C_i \tau}{\sqrt{2\epsilon_0}}, A = C_e / C_i = \frac{\tau}{\sqrt{2\epsilon_0}} \quad (4.3)$$

这里的 $C_i = \omega_0 L_\psi q / T_{eq} \ll 1$ 。为了得到准线性通量, 我们需要做的第一步是将扰动量的演化方程 (2.9) 和 (2.11) 进行傅里叶变换。

对与 $\tilde{\phi}$ 相关的扰动量演化方程 (2.9) 来说, 可以将其转化为一个关于部分势涡 $\tilde{U} \equiv A\tilde{\phi} - \bar{\Delta}\tilde{\phi}$ 的演化方程。其演化受扰动温度、曲率漂移和带状电势的影响。采用上面定义的量改写方程 (2.9) 后, 得到如下方程:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla + \Omega_Z \cdot \nabla \right) \bar{\Delta} \tilde{\phi} = \bar{\Omega}_D \partial_y \tilde{T} - iA(\omega - \omega_E) \tilde{\phi} - \tilde{V}_x \partial_x \bar{\Delta} \phi_Z \quad (4.4)$$

写为势涡 \tilde{U} 的形式:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_Z \cdot \nabla \right) (A\tilde{\phi} - \bar{\Delta}\tilde{\phi}) - \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla (\bar{\Delta}\tilde{\phi}) = -\bar{\Omega}_D \partial_y \tilde{T} + \tilde{V}_x \partial_x \bar{\Delta} \phi_Z \quad (4.5)$$

对方程 (4.5) 直接进行傅里叶变换:

$$(-i\omega + ik_y\Omega_Z)\tilde{\phi}_k = -\frac{\bar{\Omega}_D}{A + \bar{k}_\perp^2}ik_y\tilde{T}_k - \frac{\partial_x\bar{\Delta}\phi_Z}{A + \bar{k}_\perp^2}ik_y\tilde{\phi}_k \quad (4.6)$$

这里我们省略了对流非线性项, 其中 $\bar{k}_\perp^2 = \delta_b^2k_x^2 + \rho_i^2k_y^2$ 。

对 \tilde{T} 来说, 也类似地有:

$$\sqrt{2\varepsilon_0}(\partial_t + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla + \Omega_Z \cdot \nabla)\tilde{T} = -i(\omega - \omega_Z - \omega_{*n}^i - \omega_{*T}^i)\frac{q\tilde{\phi}}{T_i} \quad (4.7)$$

然后将上面方程右侧的 $-i(\omega - \omega_Z)\tilde{\phi}$ 用 (4.6) 替换, 而其中的 $\Omega_Z = \partial_x\phi_Z, \omega_Z = k_y\Omega_Z$ 。于是得到 \tilde{T}_k 的准线性形式如下:

$$\left[-i\omega + ik_y\left(\Omega_Z + \frac{C_i}{\sqrt{2\varepsilon_0}}\frac{\bar{\Omega}_D}{A + \bar{k}_\perp^2}\right)\right]\tilde{T}_k = -\frac{ik_y\tilde{\phi}_k}{\sqrt{2\varepsilon_0}}\left(C_i\frac{\delta_b^2\partial_x^3\phi_Z}{A + \bar{k}_\perp^2} - \partial_x\ln\langle T \rangle\right) \quad (4.8)$$

在这里我们同样忽略了对流非线性项。至此 $\tilde{\phi}_k$ 和 \tilde{T}_k 的准线性表达式都已得到。

热通量可以简单地从这些准线性表达式得到, 但是直接使用 $\tilde{\phi}_k$ 计算类似 $\langle\tilde{\phi}^2\rangle$ 的量可能存在风险。因为涡量通量、涡量以及速度都几乎由同一个量 $\tilde{\phi}$ 决定。所以在后面的计算中, 我们将使用势涡通量作为辅助, 以确保结果可靠。下面分别给出热通量和涡量通量的表达式。

4.1.1 热通量

热通量较为容易得到, 首先, 我们从(4.8)可以得到如下表达式:

$$\tilde{T}_k = \frac{i\tilde{V}_x(k)}{\omega - k_y\left(\Omega_Z + \frac{C_i}{\sqrt{2\varepsilon_0}}\frac{\bar{\Omega}_D}{A + \bar{k}_\perp^2}\right)}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0}}\left(C_i\frac{\delta_b^2\partial_x^3\phi_Z}{A + \bar{k}_\perp^2} - \partial_x\ln\langle T \rangle\right)$$

然后两侧同时乘以 $\tilde{V}_x(-k)$,

$$\langle\tilde{V}_x\tilde{T}\rangle_k \simeq \frac{i}{\omega - k_y\left(\Omega_Z + \frac{C_i}{\sqrt{2\varepsilon_0}}\frac{\bar{\Omega}_D}{A + \bar{k}_\perp^2}\right)}\langle\tilde{V}_x^2\rangle_k\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0}}\left(C_i\frac{\delta_b^2\partial_x^3\phi_Z}{A + \bar{k}_\perp^2} - \partial_x\ln\langle T \rangle\right) \quad (4.9)$$

该结果可以分为三个部分: 响应函数 $R = i/(\omega - k_y\Omega_Z - k_y\bar{\Omega}_D b_k)$ 、湍流强度量 $\langle\tilde{V}_x^2\rangle$, 还有来自温度梯度和平均涡度梯度的驱动。响应函数的形式表明其可能出现共振响应, 即分母为 0 的情况, 这会导致后面提到的共振输运。湍流强度量大小的确定则需要额外的条件, 后面将会引入湍流谱假设和强度演化方程解决这个问题。因为上式中的参数 $C_i \ll 0.1$, 所以来自涡度梯度的贡献通常较小, 一般也将其忽略, 但是我们在这里仍然保留这一项。在本章后面的内容中, 涡度梯度在 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 台阶

形成过程中的重要作用将会体现出来。

4.1.2 涡量通量

下一个需要得到的是涡量通量，虽然我们已经得到了 $\tilde{\phi}$ 的演化方程，但是直接使用该方程或 $A\tilde{\phi} - \bar{\Delta}\tilde{\phi}$ 的方程去求解 $\tilde{V}_x\bar{\Delta}\tilde{\phi}$ 可能会丢失某些重要的物理过程。而总势涡 $\langle q \rangle + \delta q$ 仍然是守恒量，所以这里我们使用势涡通量辅助推导，从而保留尽可能多的物理过程。我们有 $\langle \tilde{V}_x\delta q \rangle = \langle \tilde{V}_x(\tilde{T} - C_i\bar{\Delta}\tilde{\phi}) \rangle = \langle \tilde{V}_x\tilde{T} \rangle - C_i\langle \tilde{V}_x\bar{\Delta}\tilde{\phi} \rangle$ ，这里设 $\tau = 1$ ，所以自然地可以从 $\langle \tilde{V}_x\tilde{T} \rangle - \langle \tilde{V}_x\delta q \rangle$ 得到 $C_i\langle \tilde{V}_x\bar{\Delta}\tilde{\phi} \rangle$ 。

扰动势涡 δq 的表达式可以简单地从 (2.16) 得到，注意到我们这里把前面的系数吸收到了 $\bar{\Omega}_D$ 中：

$$\delta q_k = \frac{C_i\bar{\Omega}_D k_y}{\omega - k_y\Omega_Z} \tilde{T}_k - \frac{i\partial_x\langle q \rangle}{\omega - k_y\Omega_Z} \tilde{V}_x(k)$$

两侧同时乘以 $\tilde{V}_x(-k)$ 之后，

$$\langle \tilde{V}_x\delta q \rangle_k \simeq \frac{k_y}{\omega - k_y\Omega_Z} C_i\bar{\Omega}_D \langle \tilde{V}_x\tilde{T} \rangle_k - \frac{i}{\omega - k_y\Omega_Z} \langle \tilde{V}_x^2 \rangle_k \left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \partial_x \ln\langle T \rangle - C_i\partial_x\bar{\Delta}\phi_Z \right)$$

其中利用到了平均势涡的定义 (2.17)。根据前面的讨论，涡量通量可以通过下面的方法给出：

$$\begin{aligned} & C_i\langle \tilde{V}_x\bar{\Delta}\tilde{\phi} \rangle \\ &= \langle \tilde{V}_x\tilde{T} \rangle_k - \langle \tilde{V}_x\delta q \rangle_k \\ &= \langle \tilde{V}_x^2 \rangle_k \frac{\partial_x \ln\langle T \rangle}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{1}{A + \bar{k}_\perp^2} \right) \frac{ik_y C_i \bar{\Omega}_D}{(\omega - k_y\Omega_Z) \left[\omega - k_y \left(\Omega_Z + \frac{C_i}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{\bar{\Omega}_D}{A + \bar{k}_\perp^2} \right) \right]} \\ & \quad - C_i \langle \tilde{V}_x^2 \rangle_k \partial_x \bar{\Delta}\phi_Z \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{1}{A + \bar{k}_\perp^2} \right) \frac{i}{\omega - k_y \left(\Omega_Z + \frac{C_i}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{\bar{\Omega}_D}{A + \bar{k}_\perp^2} \right)} \end{aligned}$$

为了化简结果，令，

$$a_k \equiv 1 - \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{1}{A + \bar{k}_\perp^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{1}{\frac{\tau}{\sqrt{2\varepsilon_0}} + \bar{k}_\perp^2} > 0, \quad b_k \equiv \frac{C_i}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{1}{A + \bar{k}_\perp^2}$$

然后有

$$\langle \tilde{V}_x\bar{\Delta}\tilde{\phi} \rangle_k = \frac{\partial_x \ln\langle T \rangle}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{ik_y C_i \bar{\Omega}_D a_k \langle \tilde{V}_x^2 \rangle_k}{(\omega - k_y\Omega_Z)(\omega - k_y\Omega_Z - k_y b_k \bar{\Omega}_D)} - C_i \partial_x \bar{\Delta}\phi_Z \frac{ia_k \langle \tilde{V}_x^2 \rangle_k}{\omega - k_y\Omega_Z - k_y b_k \bar{\Omega}_D} \quad (4.10)$$

这样便得到了本章所需的涡量通量的表达式，其中同样包含响应函数、湍流强度谱、平均温度、平均涡度这几部分。特别值得注意的是，在温度梯度项前面的响应函数明显不同于出现的其他响应函数，它包含了两部分的贡献 $(\omega - k_y \Omega_Z)$ 和 $(\omega - k_y \Omega_Z - k_y b_k \bar{\Omega}_D)$ 。

准线性表达式 (4.9) 和 (4.10) 是 k 空间中的，我们可以将其在 k 空间中求和从而给出实空间的通量。在进行求和之前，注意到上述通量中的响应函数，如 $R = i/(\omega - k_y \Omega_Z - k_y \bar{\omega}_D b_k)$ ，只要在共振条件满足时，就可以造成共振输运，并带来一些有趣的现象。我们以涡量通量 (4.10) 为例，给出这些通量在实空间中的形式。

4.1.3 共振和非共振输运

对表达式 (4.10) 在 k 空间求和后，可以定义两个如下的输运系数：

$$\chi_1 = \text{Re} \sum_k [\tilde{V}_x(k)]^2 \frac{ik_y C_i \bar{\Omega}_D a_k}{(\omega - k_y \Omega_Z)(\omega - k_y \Omega_Z - k_y b_k \bar{\Omega}_D)}$$

$$\chi_2 = \text{Re} \sum_k [\tilde{V}_x(k)]^2 \frac{ia_k}{\omega - k_y \Omega_Z - k_y b_k \bar{\Omega}_D}$$

其中 Re 代表实部。类似于 Landau 阻尼计算中所用的方法^[72]，将上式中的频率分解为 $\omega = \omega_R + i\gamma$ ，便可以将共振和非共振系数分离出来：

$$\chi_1^{\text{non-res}} = \sum_k [\tilde{V}_x(k)]^2 a_k \frac{|\gamma| k_y C_i \bar{\Omega}_D (2\omega_R - 2k_y \Omega_Z - k_y b_k \bar{\Omega}_D)}{|\omega - k_y \Omega_Z|^2 |\omega - k_y \Omega_Z - k_y b_k \bar{\Omega}_D|^2}$$

$$\chi_1^{\text{res}} = \sum_k [\tilde{V}_x(k)]^2 a_k \frac{k_y C_i \bar{\Omega}_D \pi \delta(\omega - k_y \Omega_Z - k_y b_k \bar{\Omega}_D)}{\omega - k_y \Omega_Z}$$

$$+ \sum_k [\tilde{V}_x(k)]^2 a_k \frac{k_y C_i \bar{\Omega}_D \pi \delta(\omega - k_y \Omega_Z)}{\omega - k_y \Omega_Z - k_y b_k \bar{\Omega}_D}$$

$$\sim 0$$

$$\chi_2^{\text{non-res}} = \sum_k [\tilde{V}_x(k)]^2 a_k \frac{|\gamma|}{|\omega - k_y \Omega_Z - k_y b_k \bar{\Omega}_D|^2}$$

$$\chi_2^{\text{res}} = \sum_k [\tilde{V}_x(k)]^2 a_k \pi \delta(\omega - k_y \Omega_Z - k_y b_k \bar{\Omega}_D)$$

上述的 χ_1 对应的是涡量通量中来自温度剖面梯度的贡献， χ_2 对应的是来自涡度剖面梯度的贡献。有趣的是 χ_1 的共振成分在分解后包含两个相反的部分，并且大小上几乎抵消。也就是说：在涡量通量中，没有来自温度梯度的共振贡献！于是，我们最终得到了涡量通量的准线性形式：

$$\langle \tilde{V}_x \bar{\Delta} \tilde{\phi} \rangle_y = \chi_1^{\text{non-res}} \frac{\partial_x \ln \langle T \rangle}{\sqrt{2\varepsilon_0}} - (\chi_2^{\text{non-res}} + \chi_2^{\text{res}}) C_i \delta_b^2 \partial_x^3 \phi_Z \quad (4.11)$$

热通量也可以用相同的方法得到, 不过最终的结果会更平凡, 其中同时包含来自温度梯度和平均涡度梯度的共振和非共振贡献:

$$\langle \tilde{V}_x \tilde{T} \rangle_y = (\chi_4^{\text{non-res}} + \chi_4^{\text{res}}) \frac{C_i}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \partial_x \bar{\Delta} \phi_Z - (\chi_3^{\text{non-res}} + \chi_3^{\text{res}}) \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \partial_x \ln \langle T \rangle \quad (4.12)$$

4.1.4 拓展的湍流强度演化方程

在通量表达式 (4.9) 和 (4.10) 中, 除了有剖面梯度的作用外, 还有湍流强度 $[\tilde{V}_x(k)]^2$ 或 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle_k$ 的影响。在第 3 章中, 我们已经对 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 的演化方程进行过研究, 其演化可以用 (3.26) 描述。不过在第 3 章中, 我们忽略了 $\bar{\Delta} \phi_Z$ 的影响, 并且用一个线性增长项近似了热通量的影响。现在借助准线性通量, 我们可以将第 3 章中的结果进一步拓展。现在把完整的湍流强度演化方程写出:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_Z \cdot \nabla \right) \left(A \tilde{\phi} - \bar{\Delta} \tilde{\phi} \right)^2 \right\rangle &= -\bar{\Omega}_D \left\langle \tilde{T} \left(A \tilde{V}_r - \delta_b^2 \partial_r^2 \tilde{V}_r \right) \right\rangle - \delta_b^4 \partial_r \langle \tilde{V}_r \tilde{V}_y \rangle \partial_r^3 \phi_Z \\ &+ \frac{1}{2} \left[A \left\langle \nabla \tilde{\phi}^2 \times \left(\nabla \bar{\Delta} \tilde{\phi} \right) \cdot \hat{z} \right\rangle + \left\langle \nabla \left(\bar{\Delta} \tilde{\phi} \right)^2 \times \nabla \tilde{\phi} \cdot \hat{z} \right\rangle \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

上式同样来自于 (4.5), 本质上还是关于势涡 $\tilde{U} \equiv A \tilde{\phi} - \bar{\Delta} \tilde{\phi}$ 的涡量拟能 $\langle \tilde{U}^2 \rangle$ 的演化方程。其中等号右侧第一项形式上和热通量很类似, 右侧第二项和雷诺应力 (或涡量通量) 以及平均涡度剖面有关, 第三项则是较为复杂的非线性项。我们在本章的前面几节中已经通过准线性近似得到了热通量和涡量通量, 所以 (4.13) 等号右侧前两项中的通量可以用相同的方法处理, 具体可见附录 A.1。至于第三项, 我们在第 3 章中, 得出的结论是三乘积的非线性项中存在非线性扩散和非线性阻尼效应, 如式 (3.25) 所示, 所以在这里可以对 (4.13) 等号右侧的第三项应用这一结论, 将其简化为非线性扩散 $\partial_x D_U \partial_x \langle \tilde{U}^2 \rangle$ 和非线性阻尼 $\langle \tilde{U}^2 \rangle D_U / l_x^2$ 。其中 $D_U \propto \langle \tilde{\phi}^2 \rangle$, l_x 大概在数个回环半径或香蕉轨道半径之间。对方程 (4.13) 应用这些化简和近似得到方程 (4.14) 如下:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle U^2 \rangle &= \frac{\partial}{\partial x} D_U \frac{\partial}{\partial x} \langle U^2 \rangle - \frac{D_U}{l_x^2} \langle U^2 \rangle \\ &- \frac{\bar{\Omega}_D}{\sqrt{2\varepsilon_0}} C_i (\chi_6^{\text{non-res}} + \chi_6^{\text{res}}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\Delta} \phi_Z \right) + \frac{\bar{\Omega}_D}{\sqrt{2\varepsilon_0}} (\chi_5^{\text{non-res}} + \chi_5^{\text{res}}) \frac{\partial}{\partial x} \langle T \rangle \\ &- \frac{1}{C_i} \chi_1^{\text{non-res}} \left(\frac{\partial \ln \langle T \rangle}{\partial x \sqrt{2\varepsilon_0}} \right) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\Delta} \phi_Z \right) \right] + (\chi_2^{\text{non-res}} + \chi_2^{\text{res}}) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\Delta} \phi_Z \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

其中的 χ_5 和 χ_6 表达式见附录。利用 (4.14) 得到湍流强度 $\langle \tilde{U}^2 \rangle$ 之后, 再通过 Green 函数转化 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle = \mathcal{G}_2 \otimes \langle \tilde{U}^2 \rangle$, 便得到了我们在输运系数中需要的湍流强度。

回忆在本章开头提到的平均剖面演化方程 (4.1) - (4.2), 现在把得到的涡量通

量和热通量代入得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\Delta\phi_Z}) = & -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C_i} \chi_1^{\text{non-res}} \frac{\partial \ln \langle T \rangle}{\partial x} \sqrt{2\varepsilon_0} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\chi_2^{\text{non-res}} + \chi_2^{\text{res}} + \nu_c) \frac{\partial \overline{\Delta\phi_Z}}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \ln \langle T \rangle = & -\frac{\partial}{\partial x} \left[C_i (\chi_4^{\text{non-res}} + \chi_4^{\text{res}}) \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\Delta\phi_Z}) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\chi_3^{\text{non-res}} + \chi_3^{\text{res}} + \chi_{\text{neo}}) \frac{\partial \ln \langle T \rangle}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

其中人工添加的两项, ν_c 是平均流的碰撞耗散, χ_{neo} 是新经典输运。相比湍流输运这两项在模型中的作用较弱。由于模型假设了 $C_i \ll 1$, 所以方程 (4.14) - (4.16) 中平均涡度梯度的贡献通常比温度梯度的贡献小。但是在下一节中可以看到, 共振和非共振输运系数在量级上的分离, 所以有可能使得平均涡度梯度的贡献更大。至此, 我们研究剖面台阶所需的湍流-剖面演化系统 (4.14) - (4.16) 已具备雏形。不过很明显, 上面的模型中包含多个待定的输运系数, 还无法用于计算。下一步是对输运系数作进一步的简化。

4.2 输运系数模型

我们在上一节得到了平均剖面演化和湍流强度演化所需的通量, 不过其中包含的众多输运系数仍然需要化简, 所以本节的目标是构建一个合适的输运系数模型。我们以 χ_3 为例, 解释采用的化简方法, 至于其他的输运系数则可以在附录A.2中找到。

$$\chi_3^{\text{non-res}} = \sum_k [\tilde{V}_x(k)]^2 \frac{|\gamma|}{|\omega - k_y \Omega_Z - k_y b_k \bar{\Omega}_D|^2} \quad (4.17)$$

$$\chi_3^{\text{res}} = \sum_k [\tilde{V}_x(k)]^2 \pi \delta(\omega - k_y \Omega_Z - k_y b_k \bar{\Omega}_D) \quad (4.18)$$

对上面的表达式来说, 最直接的简化方法是求出其中关于 k 的求和或积分的解析表达式。但是要真正做到这一点, 我们还缺少两个重要的条件: 色散关系 $\omega(k)$ 和谱分布函数 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 。幸好两个条件都可以通过适当的近似模型给出。

一方面, 这个系统的色散函数可以从 Darnet 模型 (2.6) - (2.7) 得到。如本论文第 2.4 节中所示, 通过数值的方法解色散函数得到色散关系, 又进一步可以对色散关系作如下拟合 (更多细节, 见 (2.40), (2.41)):

$$\omega_R = R \Omega_D k_y, \quad \gamma = \Lambda R \Omega_D k_y (k_{y,\text{max}} - k_y) \quad (4.19)$$

在这个模型中, 实频率简单地正比于 k_y , 而增长率则近似为二次函数的形式。这

里的 R 是一个在 2.3 左右的常数, Λ 和 $k_{y,\max}$ 是拟合数值结果的参数。为了方便处理, 我们设 $\Lambda = \rho/\sigma$, $k_{y,\max} = 1/(\mu\rho)$ 。同时, 这里也省略了参数对 k_x 和 k_T 的依赖。

另一方面, 对积分中的湍流强度谱, 一般来说需要遵循一定的幂率关系^[78]。在截断高波数后, 可以应用双-洛伦茨谱近似^[74]:

$$|\tilde{\phi}|_{k_x, k_y}^2 = \frac{|\tilde{\phi}_0|^2}{\pi^2 \Delta k_x \Delta k_y} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{k_x - k_{x0}}{\Delta k_x}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{k_y - k_{y0}}{\Delta k_y}\right)^2\right]} \quad (4.20)$$

不过上面两个模型是相互独立的, 为了最终完成积分, 还需要设定合理的参数将两个模型联系起来。也就是说, 有两组来自上面模型的参数:

1. $(k_{x,\max}, k_{y,\max}, \Lambda)$ 来自色散关系
2. $(k_{x0}, k_{y0}, \Delta k_x, \Delta k_y)$ 来自谱函数

我们可以将两组参数用下面的形式联系起来:

$$k_{x0} = \alpha_x k_{x,\max}, \quad \Delta k_x = \beta_x k_{x,\max} \quad (4.21)$$

$$k_{y0} = \alpha_y k_{y,\max}, \quad \Delta k_y = \beta_y k_{y,\max} \quad (4.22)$$

这里应当有 $\alpha_{x,y} \ll 1$ 和 $\beta_{x,y} < 1$, 我们可以简单地假设 $\alpha = 0$ 。这些联系参数不会影响本文最终的结论。并且再次强调, 我们为了表述方便定义了 $\Lambda \sim \rho/\sigma$, $k_{y,\max} = 1/(\mu_y \rho)$ 。最终, 上面所有这些模型 (4.19)、(4.20) 和参数现在可以用来计算如 (4.17) - (4.18) 的输运系数。让我们继续以 χ_3 为例化简输运系数。

4.2.1 非共振输运系数的简化

对非共振输运系数 $\chi_3^{\text{non-res}}$, 其表达式 (4.17) 中关于 k 的求和可以转换为积分。于是将模型 (4.19) 代入其中, 而 $|\tilde{\phi}|_{k_x, k_y}^2$ 用一个双-洛伦茨谱 (4.20) 代入。得到结果如下:

$$\chi_3^{\text{non-res}} = 2 \int_0^{k_{y,\max}} \int_0^{k_{x,\max}} |\tilde{\phi}|_{k_x, k_y}^2 \frac{\Lambda k_y (k_{y,\max} - k_y)}{R \Omega_D \left[1 + \Lambda^2 (k_{y,\max} - k_y)^2\right]} dk_x dk_y \quad (4.23)$$

这里的积分上界取了色散关系中的 $k_{x,\max}$ 和 $k_{y,\max}$ 。然后利用我们定义的连接参数 (4.21) 和 (4.22), 便可以解析地给出积分结果。具体的结果非常复杂和冗长, 参见附录 A.2。不过幸运的是, 我们发现结果中最主要的部分由 $\mu^2 \sigma^2$ 相关的项决定。具体来说, 从色散关系我们知道 $\mu^2 \sigma^2$ 是一个大于 1 接近 10 的数。所以只需要保留积分结果中涉及 $\mu^2 \sigma^2$ 最高次幂的那些项。最终, 我们得到 $\chi_3^{\text{non-res}}$ 的近似表达式为:

$$\chi_3^{\text{non-res}} \sim \frac{|\tilde{\phi}_0|^2 \mu^2 \sigma^2}{\Omega_D \rho \left[(\mu^2 \sigma^2 + 1 + \beta^2)^2\right]} \quad (4.24)$$

至于其他的非共振输运系数，例如 $\chi_1^{\text{non-res}}$ ，我们有：

$$\chi_1^{\text{non-res}} \simeq 2\sqrt{2\varepsilon_0}(\rho^2\langle k_y^2 \rangle + \delta^2\langle k_x^2 \rangle) \int_0^{k_{y,\max}} \int_0^{k_{x,\max}} |\tilde{\phi}|_{k_x, k_y}^2 \frac{2\Lambda k_y (k_{y,\max} - k_y)}{\Omega_D [1 + \Lambda^2 (k_{y,\max} - k_y)^2]^2} dk_x dk_y \quad (4.25)$$

其中 $\langle k_x^2 \rangle$ 和 $\langle k_y^2 \rangle$ 是从积分中提取出来的平均量。为了简化，我们直接设存在常数满足 $\langle k_x^2 \rangle = Ck_{x,\max}^2$ 以及 $\langle k_y^2 \rangle = Ck_{y,\max}^2$ 。同时从色散关系我们知道：

$$\Theta_{\max} \equiv \rho^2 k_{y,\max}^2 + \delta^2 k_{x,\max}^2 \sim 1 \quad (4.26)$$

其中 Θ_{\max} 是一个常数。那么便可以写出如下 $\chi_1^{\text{non-res}}$ 的近似：

$$\chi_1^{\text{non-res}} = \sqrt{2\varepsilon_0} C \Theta_{\max} \chi_3^{\text{non-res}} \quad (4.27)$$

其他所有的非共振输运系数 $\chi_1^{\text{non-res}}$ 到 $\chi_6^{\text{non-res}}$ 都可以用相同的方法计算出来。对得到的结果，我们令 $\vartheta \equiv \sqrt{2\varepsilon_0} \Theta_{\max} C < 1$ 为一个常数，那么所有的系数便可以对 $\chi_3^{\text{non-res}}$ 做归一化。具体结果如下：

$$\chi_1^{\text{non-res}} = \vartheta \chi_3^{\text{non-res}} \quad (4.28)$$

$$\chi_2^{\text{non-res}} = \vartheta \chi_3^{\text{non-res}} \quad (4.29)$$

$$\chi_4^{\text{non-res}} = \sqrt{2\varepsilon_0} (\tau - \vartheta) \chi_3^{\text{non-res}} \quad (4.30)$$

$$\chi_5^{\text{non-res}} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0}} (\tau + \vartheta) \chi_3^{\text{non-res}} \quad (4.31)$$

$$\chi_6^{\text{non-res}} = \chi_3^{\text{non-res}} \quad (4.32)$$

至此便得到了所需的所有非共振输运系数。

4.2.2 共振输运系数的简化

对共振输运系数 χ_3^{res} 来说，我们只需要找到共振条件，即表达式中 δ 函数的解，然后将满足共振条件的 k_{res} 代入谱函数中即可得到结果。最后和前面的步骤相同，将其他的共振输运系数都归一化到 χ_3^{res} 上。

4.2.2.1 共振条件

首先，我们讨论 (4.18) 中的共振条件：

$$\delta \left(\omega_R - k_y \Omega_Z - \frac{C_i \bar{\Omega}_D k_y}{\tau + \sqrt{2\varepsilon_0} (\delta^2 k_x^2 + \rho^2 k_y^2)} \right) \quad (4.33)$$

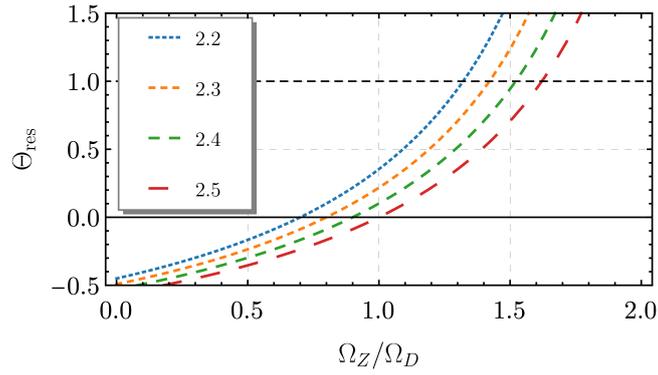


图 4.1 Θ_{res} 和 Ω_Z 的关系。仅当 Ω_Z 处在一定范围内才可能出现共振，共振所需的阈值大概为 $\Omega_Z > \Omega_D$ 。当 Ω_Z 过大时 ($\sim 1.5\Omega_D$)，共振条件 $\Theta_{\text{res}} > 1$ 在物理上不能成立。不同的线代表公式 (4.19) 中拟合参数 R 取不同值时的结果

这里的 $\bar{\Omega}_D = 3\Omega_D/(2C_i)$ ， ω_R 是实频率。由第 2.4 节中的色散关系我们知道实频率可以被近似拟合为：

$$\omega_R = \frac{R_1 k_y \Omega_D}{1 + R_2(\rho^2 k_y^2 + \delta^2 k_x^2)} \simeq R k_y \Omega_D \quad (4.34)$$

其中 R_2 远小于 1， $R \approx 2.36$ ，如式 (2.40) 所示。把实频率代入到上面的函数 (4.33)，那么那些使得函数自变量为 0 的 k_{res} 便是满足共振条件的波数。注意到共振条件主要由 $\delta^2 k_x^2 + \rho^2 k_y^2$ 决定，所以我们定义如下的量：

$$\Theta_{\text{res}} \equiv \delta^2 k_{x,\text{res}}^2 + \rho^2 k_{y,\text{res}}^2 \quad (4.35)$$

接着，从共振条件 (4.33) 我们知道共振波数 (k_x, k_y) 需要满足如下的条件：

$$\Theta_{\text{res}} = \frac{\Omega_D(R\tau - 1.5) - \tau\Omega_Z}{\sqrt{2\varepsilon_0}(\Omega_Z - R\Omega_D)} \quad (4.36)$$

仔细观察上面的共振条件，注意到右侧除了 $\Omega_Z \equiv \partial_x \phi_Z$ 以外的所有参数都是常数，而 Ω_Z 将共振条件和流的剖面联系起来！把共振条件 Θ_{res} 和流 Ω_Z 的关系画出来，如图 4.1 所示，其中不同的线条代表拟合参数 R 取值不同，用以测试结果对参数的敏感性。回顾前文中色散关系告诉我们 Θ 有限值条件 (2.39)，近似地有

$$\Theta_{\text{max}} \equiv \delta^2 k_{x,\text{max}}^2 + \rho^2 k_{y,\text{max}}^2 = \frac{1}{\mu_r^2} + \frac{1}{\mu_y^2} \sim 1 \quad (4.37)$$

所以，所有的 Θ 都必须满足 $\Theta < \Theta_{\text{max}} \sim 1$ ，包括 Θ_{res} 。在图 4.1 中，为了使得共振成为可能必须要求 $0 < \Theta_{\text{res}} < 1$ ，这对应于 Ω_Z/Ω_D 必须近似地处在 1 到 1.5 之间。而只要 $1 < \Omega_Z/\Omega_D < 1.5$ ，就必然存在某些 ($k_{x,\text{res}}, k_{y,\text{res}}$) 使得前面提到的共振条件 (4.36) 得到满足！换句话说：实际的共振条件转化为了 $1 < \Omega_Z/\Omega_D < 1.5$ ！

共振条件和 $E \times B$ 环向平均流建立的联系，其背后的物理机制其实不难理解。在本论文模型中，捕获离子的进动速度为 Ω_D ，设为了一个常数。捕获离子模

(TIM) 的相速度从第 2.4 节的色散关系可知近似为 $R\Omega_D$, R 大约为 2.36。注意到这两者之间天然存在一个差值。当 $E \times B$ 环向平均流 Ω_Z 的值处在大概 1 到 1.5 倍 Ω_D 时, 捕获离子进动速度叠加上平均流的多普勒效应便可以实现和 TIM 的共振。

4.2.2.2 简化系数

回到共振输运系数 χ_3^{res} 本身, 当条件 $1 < \Omega_Z/\Omega_D < 1.5$ 满足时, 必然存在 $(k_{x,\text{res}}, k_{y,\text{res}})$ 使得共振条件成立。下面把表达式 (4.18) 中的求和写为积分, 然后将这些 $(k_{x,\text{res}}, k_{y,\text{res}})$ 代入, 得到如下的表达式:

$$\begin{aligned} \chi_3^{\text{res}} &= \int_0^{k_{x,\text{max}}} \int_0^{k_{y,\text{max}}} \frac{|\tilde{\phi}_0|^2}{\pi^2 \Delta k_x \Delta k_y} \frac{k_y^2 \delta(\omega_R - k_y \Omega_Z - k_y b_k \bar{\Omega}_D)}{\left[1 + \left(\frac{k_x - k_{r0}}{\Delta k_x}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{k_y - k_{y0}}{\Delta k_y}\right)^2\right]} \\ &\simeq \frac{|\tilde{\phi}_0|^2 k_{y,\text{res}}^2}{\left[1 + \left(\frac{k_{x,\text{res}}}{\Delta k_x}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{k_{y,\text{res}}}{\Delta k_y}\right)^2\right]} \frac{1}{|\Delta k_y (\Omega_Z + b_{k,\text{res}} \bar{\Omega}_D)|} \end{aligned} \quad (4.38)$$

上面的式子中代入 Θ_{res} 、 $\Delta k_y = \beta_y k_{y,\text{max}} = \frac{\beta_y}{\mu_y \rho}$ 和 $\Delta k_x = \beta_x k_{x,\text{max}} = \frac{\beta_x}{\mu_x \rho}$ 。我们令 $\beta_x/\mu_x = \beta_y/\mu_y = \beta/\mu$, 便得到如下的近似结果:

$$\chi_3^{\text{res}} \simeq \frac{|\tilde{\phi}_0|^2 k_{y,\text{res}}^2}{\left[1 + \left(\frac{\mu_x}{\beta_x}\right)^2 \delta^2 k_{x,\text{res}}^2 + \left(\frac{\mu_y}{\beta_y}\right)^2 \rho^2 k_{y,\text{res}}^2\right]} \frac{1}{\left|\frac{\beta_y}{\mu_y \rho} \left(\Omega_Z + \Omega_D \frac{3/2}{\tau + \sqrt{2\varepsilon_0} \Theta_{\text{res}}}\right)\right|} \quad (4.39)$$

因为我们这里需要的只是一个近似的结果, 所以可以简单地设 $\tau + \sqrt{2\varepsilon_0} \Theta_{\text{res}} \sim 3/2$,

$$\chi_3^{\text{res}} \sim |\tilde{\phi}_0|^2 k_{y,\text{res}}^2 \frac{\beta^2}{\beta^2 + \mu^2 \Theta_{\text{res}}} \frac{\mu_y \rho}{|\beta_y (\Omega_Z + \Omega_D)|} \quad (4.40)$$

便得到了 χ_3^{res} 的近似表达式。所有其他的共振输运系数都可以用相同的方法计算。令 $\vartheta_{\text{res}} \equiv \sqrt{2\varepsilon_0} \Theta_{\text{res}}$, 把其他系数归一化到 χ_3^{res} , 便得到了如下的共振输运系数:

$$\chi_2^{\text{res}} \sim \vartheta_{\text{res}} \chi_3^{\text{res}} \quad (4.41)$$

$$\chi_3^{\text{res}} = |\tilde{\phi}_0|^2 k_{y,\text{res}}^2 \frac{\beta^2}{\beta^2 + \mu^2 \Theta_{\text{res}}} \frac{\mu_y \rho}{|\beta_y (\Omega_Z + \Omega_D)|} \quad (4.42)$$

$$\chi_4^{\text{res}} \sim \sqrt{2\varepsilon_0} (1 - \vartheta_{\text{res}}) \chi_3^{\text{res}} \quad (4.43)$$

$$\chi_5^{\text{res}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0}} (1 + \vartheta_{\text{res}}) \chi_3^{\text{res}} \quad (4.44)$$

需要强调的是, 上面所有的共振输运系数仅在 $1 < \Omega_Z/\Omega_D < 1.5$ 满足时成立。

至此，我们已经得到了出现在模型 (4.14) - (4.16) 中的所有共振和非共振湍流输运系数。理论上来说，现在已经可以计算剖面的演化过程了，不过为了便于计算，我们下面还将把所有系数统一为一个输运系数模型。

4.2.3 一个统一的输运系数模型

首先我们从输运系数中提取出湍流强度，仍然以 χ_3 为例，这里定义了系数 χ^n 和 χ^r 如下：

$$\chi_3^{\text{non-res}} = \frac{|\tilde{\phi}_0|^2 \mu^2 \sigma^2}{\Omega_D \rho \left[(\mu^2 \sigma^2 + 1 + \beta^2)^2 \right]} \equiv \chi^n |\tilde{\phi}_0|^2 \quad (4.45)$$

$$\chi_3^{\text{res}} = |\tilde{\phi}_0|^2 k_{y,\text{res}}^2 \frac{\beta^2}{\beta^2 + \mu^2 \Theta_{\text{res}}} \frac{\mu_y \rho}{|\beta_y (\Omega_Z + \Omega_D)|} \equiv \chi^r |\tilde{\phi}_0|^2 \quad (4.46)$$

其中 χ_3^{res} 仅当 $\Omega_D < \Omega_Z < 1.5\Omega_D$ 时成立。至于其他的系数，我们简单地认为 $\vartheta = \vartheta_{\text{max}} = \vartheta_{\text{res}}$ 。考虑到 $\mu^2 \sigma^2 \sim 10$ ，应当有以下关系成立，

$$\chi^r / \chi^n \sim \frac{(\mu^2 \sigma^2 + 1 + \beta^2)^2}{\mu^2 \sigma^2} \sim \mathcal{O}(10) - \mathcal{O}(10^2) \quad (4.47)$$

也就是说，共振输运系数大约为非共振输运系数的 10 到 100 倍。另外，根据定义可知 $\mu\sigma = (\Lambda k_{y,\text{max}})^{-1}$ ，所以共振和非共振输运的比值其实约为实频率和增长率比值的平方：

$$\chi^r / \chi^n \sim \frac{1}{\Lambda^2 k_{y,\text{max}}^2} \sim \frac{\Omega_D^2}{\Lambda^2 \Omega_D^2 k_{y,\text{max}}^2} \sim \frac{\omega_R^2}{\gamma^2} \quad (4.48)$$

利用上面的比值信息，可以定义一个如图 4.2 的分段函数便于计算输运系数 $\chi \equiv (\chi^n + \chi^r) |\tilde{\phi}_0|^2$ ，其中 $\chi^n = 1$ ， $\chi^r = 100$ 。出于数值计算平滑性上的考虑，在共振触发阈值附近设置了一定的展宽 $w_\Omega = 0.2$ 。该输运系数的模型将被用在后续湍流-剖面演化的计算中。

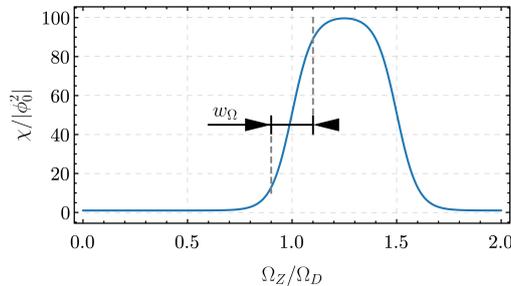


图 4.2 χ 和 Ω_Z 的分段函数。当 Ω_Z 不在共振条件范围内时，取 $\chi = \chi^n |\tilde{\phi}_0|^2$ ；当 $1 < \Omega_Z / \Omega_D < 1.5$ 时，取 $\chi = \chi^r |\tilde{\phi}_0|^2$ 。在共振阈值附近设置了展宽 w_Ω

4.2.4 关于临界剖面的假设

在这一小节，我们将简单讨论一下临界剖面的问题。在本文中定义的共振输运系数被触发时，输运很强，从而可能导致一个非常平坦的温度剖面。这样平坦的剖面可能会低于 TIM 激发所需要的最低温度梯度 κ_T^c （见第 2.4 节中 (2.38) 式），从而带来一个因果性的问题：当温度梯度不足以激发不稳定性 and 湍流的时候，也就不应该有湍流输运系数。所以所有的湍流输运系数在局域梯度 $\kappa_T < \kappa_T^c$ 时应当为 0，并且在 $\kappa_T \gtrsim \kappa_T^c$ 后迅速地增长起来。在我们的模型中，输运系数的这一特性可以在一定程度上实现。

具体来说，回到计算积分时使用的色散关系模型 (4.19)，其中包含了参数 $\Lambda = \rho/\sigma$ 和 $k_{y,\max} = 1/(\mu\rho)$ 。当 κ_T 朝着 κ_T^c 递减时，增长率也将会递减并最终小于 0，如图 2.3。我们可以在参数 μ 和 σ 中添加对 κ_T 的依赖关系而恢复这一特性：

$$\sigma = \infty, \mu_y = \infty, \text{ when } \kappa_T < \kappa_T^c$$

这种对 κ_T 的依赖关系反映到输运系数模型上表现为：

$$\chi^n \propto \frac{\mu^2 \sigma^2}{\left[(\mu^2 \sigma^2 + 1 + \beta^2)^2 \right]} \xrightarrow[\kappa_T < \kappa_T^c]{\mu, \sigma \rightarrow \infty} 0 \quad (4.49)$$

$$\chi^r \propto \frac{\beta^2}{\beta^2 + \mu^2 \Theta_{\text{res}}} \xrightarrow[\kappa_T < \kappa_T^c]{\mu, \sigma \rightarrow \infty} 0 \quad (4.50)$$

所以理论上来说，通过合理地描述输运系数关于 κ_T 的依赖关系应该可以得到平坦但是处在临界梯度附近的剖面状态。我们在后面的小节中尝试了在 χ 中引入 κ_T 的影响，不过效果并不理想。所以在本文中引入一个假设作为替代。

假设 4.1: 在本研究使用的模型中，共振输运可能造成的平坦剖面实际上处在近临界梯度态 (Near Marginal)，即其梯度接近线性不稳定性的阈值 (2.38)。

近临界梯度和雪崩输运过程、自组织临界等既有关联也有区别，在未来的工作中我们将进一步研究这个问题。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \ln \langle T \rangle &= -\sqrt{2\varepsilon_0} \partial_x \langle \tilde{V}_x \tilde{T} \rangle_y + \chi_{\text{neo}} \partial_x^2 \ln \langle T \rangle \\
 &\downarrow \\
 &\langle \tilde{V}_x \tilde{T} \rangle_k \\
 &\downarrow \\
 &\sim R(\omega - k_y \Omega_Z - b_k \bar{\Omega}_D) \langle \tilde{V}_x^2 \rangle_k \left[\partial_x \bar{\Delta} \phi_Z(\dots) - \partial_x \ln \langle T \rangle(\dots) \right] \\
 &\downarrow \\
 &(\chi_4^{\text{non-res}} + \chi_4^{\text{res}}) \partial_x \bar{\Delta} \phi_Z - (\chi_3^{\text{non-res}} + \chi_3^{\text{res}}) \partial_x \ln \langle T \rangle \\
 &\quad \chi \text{ 模型} \downarrow \\
 &\quad \text{方程 (4.52)}
 \end{aligned}$$

图 4.3 热通量的推导流程示意图

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} [\bar{\Delta} \phi_Z] &= -\partial_x \langle \tilde{V}_x \bar{\Delta} \tilde{\phi} \rangle_y + \nu_c \partial_x^2 \bar{\Delta} \phi_Z \\
 &\downarrow \\
 \langle \tilde{V}_x \bar{\Delta} \tilde{\phi} \rangle_k &= -\langle \tilde{V}_x \delta q \rangle_k + \langle \tilde{V}_x \tilde{T} \rangle_k \\
 &\downarrow \\
 -R(\omega - k_y \Omega_Z) \langle \tilde{V}_x^2 \rangle_k &\left[\partial_x \ln \langle T \rangle(\dots) - \partial_x \bar{\Delta} \phi_Z(\dots) \right] \\
 &\quad \left. \begin{array}{l} R(\omega - k_y \Omega_Z) \langle \tilde{V}_x \tilde{T} \rangle_k(\dots) \\ \end{array} \right\} \downarrow \\
 R(\omega - k_y \Omega_Z) R(\omega - k_y \Omega_Z - k_y b_k \bar{\Omega}_D) &\langle \tilde{V}_x^2 \rangle_k \partial_x \ln \langle T \rangle(\dots) \\
 -R(\omega - k_y \Omega_Z - k_y b_k \bar{\Omega}_D) \langle \tilde{V}_x^2 \rangle_k &\partial_x \bar{\Delta} \phi_Z(\dots) \\
 &\downarrow \\
 \chi_1^{\text{non-res}} \frac{\partial_x \ln \langle T \rangle}{\sqrt{2\varepsilon_0}} - (\chi_2^{\text{non-res}} + \chi_2^{\text{res}}) &\partial_x \bar{\Delta} \phi_Z \\
 &\quad \chi \text{ 模型} \downarrow \\
 &\quad \text{方程 (4.51)}
 \end{aligned}$$

图 4.4 涡量通量的推导流程示意图

4.3 剖面演化: $E \times B$ 台阶的形成

至此, 我们已经得到了求解演化模型 (4.15) - (4.14) 所需的所有通量和输运系数模型。整个过程可以归纳为图 4.3 和图 4.4 两个流程图。下一步便是求解这个系统, 并研究剖面演化。具体来说, 我们将在边界引入热通量驱动系统演化, 剖面将演化出准周期模式; 然后讨论该系统中的基本反馈循环; 接着找出何时台阶形成以及控制台阶特征参数; 最后简短地讨论我们为了实现近临界态而做的一些尝试。

4.3.1 方程和边界条件

正如推导流程图所示, 我们将所有系数的简化 (4.45)、(4.46) 还有通量全部代入了剖面演化方程, 最后得到:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\Delta\phi_Z}) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C_i} \vartheta \chi^n \frac{\partial \ln\langle T \rangle}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\vartheta \chi \delta_b^2 \frac{\partial^3 \phi_Z}{\partial x^3} \right] + \nu_c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{\Delta\phi_Z} \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln\langle T \rangle = -\frac{\partial}{\partial x} \left[C_i \sqrt{2\varepsilon_0} (1 - \vartheta) \chi \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\Delta\phi_Z}) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\chi \frac{\partial}{\partial x} \ln\langle T \rangle \right] + \chi_{\text{neo}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln\langle T \rangle \quad (4.52)$$

为了求解上面的方程, 必须要给出相应的边界条件。这里我们选择最简单的一组边界条件:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \overline{\Delta\phi_Z} \right|_{\text{B.C.}} = 0 \quad (4.53)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \ln\langle T \rangle \right|_{\text{B.C.}} \equiv \kappa_T^{\text{B.C.}} = \text{Const.} \quad (4.54)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{U}^2 \rangle \right|_{\text{B.C.}} = 0, \quad \text{or} \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{\phi}^2 \rangle \right|_{\text{B.C.}} = 0 \quad (4.55)$$

这里大部分边界梯度为 0。注意到边界处的温度梯度被设为了一个可控制的参数: $\kappa_T^{\text{B.C.}}$, 其中的 $\kappa_T \equiv \partial_x \ln\langle T \rangle$ 。边界热流将驱动系统演化, 这对应于所谓的“Flux-driven”系统。在本论文的模型中, 使用了如图 4.2 所示的分段函数 $\chi \equiv (\chi^n + \chi^r) |\tilde{\phi}_0|^2$ 。不过为了使记号简洁, 我们默认在后面的方程中出现的 χ^n 为 $\chi^n |\tilde{\phi}_0|^2$ 。在输运系数模型中, 一方面 χ 是关于 $\Omega_Z = \partial_x \phi_Z$ 的函数, 所以也需要确定 Ω_Z 的边界条件:

$$\left. \Omega_Z \right|_{\text{B.C.}} = 0 \quad (4.56)$$

另一方面需要 $|\tilde{\phi}_0|^2$ 的值。为了得到湍流强度 $|\tilde{\phi}_0|^2$, 我们引入了 $\langle U^2 \rangle$ 的演化方程:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle U^2 \rangle = \frac{\partial}{\partial x} D_U \frac{\partial}{\partial x} \langle U^2 \rangle - \frac{3}{2} \frac{\Omega_D}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \chi \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\Delta\phi_Z}) + \frac{3}{2} \frac{\Omega_D}{2\varepsilon_0 C_i} (1 + \vartheta) \chi \frac{\partial}{\partial x} \ln\langle T \rangle$$

$$-\frac{1}{C_i} \vartheta \chi^n \left(\frac{\partial \ln \langle T \rangle}{\partial x \sqrt{2\epsilon_0}} \right) \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{\Delta \phi_Z}) \right] + \vartheta \chi \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{\Delta \phi_Z}) \right]^2 - \frac{v_{NL}}{l_x^2} \langle U^2 \rangle^2 \quad (4.57)$$

其中 v_{NL} 是关于湍流非线性饱和的参数, l_x 为湍流径向相关长度 (参见第 3.1.4 节)。然后用 Green 函数从 $\langle \tilde{U}^2 \rangle$ 得到 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$:

$$\langle \tilde{\phi}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G_2(x-x') \langle \tilde{U}^2 \rangle(x') dx' \quad (4.58)$$

这里定义了一个格林函数:

$$G_2(x) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(A+k^2)^2} \right\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2A^3}} \left(e^{-\sqrt{A}|x|} + \sqrt{A}|x| e^{-\sqrt{A}|x|} \right)$$

而湍流强度的边界条件则由 (4.55) 给出。

归结起来, 剖面演化方程 (4.52)、(4.51) 和湍流强度演化方程 (4.57)、边界条件 (4.53) - (4.56) 和图 4.2 中的输运系数模型, 共同构成了本章研究的完整湍流-剖面系统。下一步便是从数值上求解这个系统。

4.3.2 数值结果和剖面的基本行为

在数值方法上, 我们选择了数值直线法离散前面给出的湍流-剖面演化系统, 从而得到了一组微分代数方程, 然后利用 Mathematica 的 NDSOLVE 函数求解。基于下表 4.1 中的参数, 我们对前面提到的系统进行了数值求解。我们设定了 $v_{NL} = 40$, 这将使得湍流饱和之后处在 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle \simeq \delta^2$ 的水平上, 于是 $\chi \simeq (\chi^n + \chi^l) \delta^2$ 。而 v_c 和 χ_{neo} 都被设置为与非共振湍流输运保持固定比例, 且大概小一个数量级。最后的结果如图 4.5 所示。可以看到温度剖面中出现了非常明显的台阶, $E \times B$ 平均流也出现了准规则模式, 也就意味着系统中自发形成了 $E \times B$ 台阶这一现象。值得注意的是, 虽然以 $\langle \tilde{U}^2 \rangle$ 表征的湍流强度中也出现了褶皱和模式, 但在经过 (4.58) 的卷积之后得到的 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 中褶皱变得非常平滑。这也说明湍流强度本身在不同区域的强弱变化不是台阶形成的直接因素, 所以这里的台阶形成机制不同于以往的理论 (参见第 1.2.3 节)。

对剖面中的几个时间点做切片如图 4.6 所示。在图 4.6(c) 中, 首先观察到温度

表 4.1 数值计算选择的参数

参数	ϵ_0	τ	C_i	ρ	δ	Ω_D	ϑ	v_c	χ_{neo}	v_{NL}	κ_T^{INL}	$\Delta \kappa_T$
值	1/4	1	0.1	10^{-2}	0.06	1	0.2	$0.1 \chi^n \delta^2$	$0.5 \chi^n \delta^2$	40	1	0.3

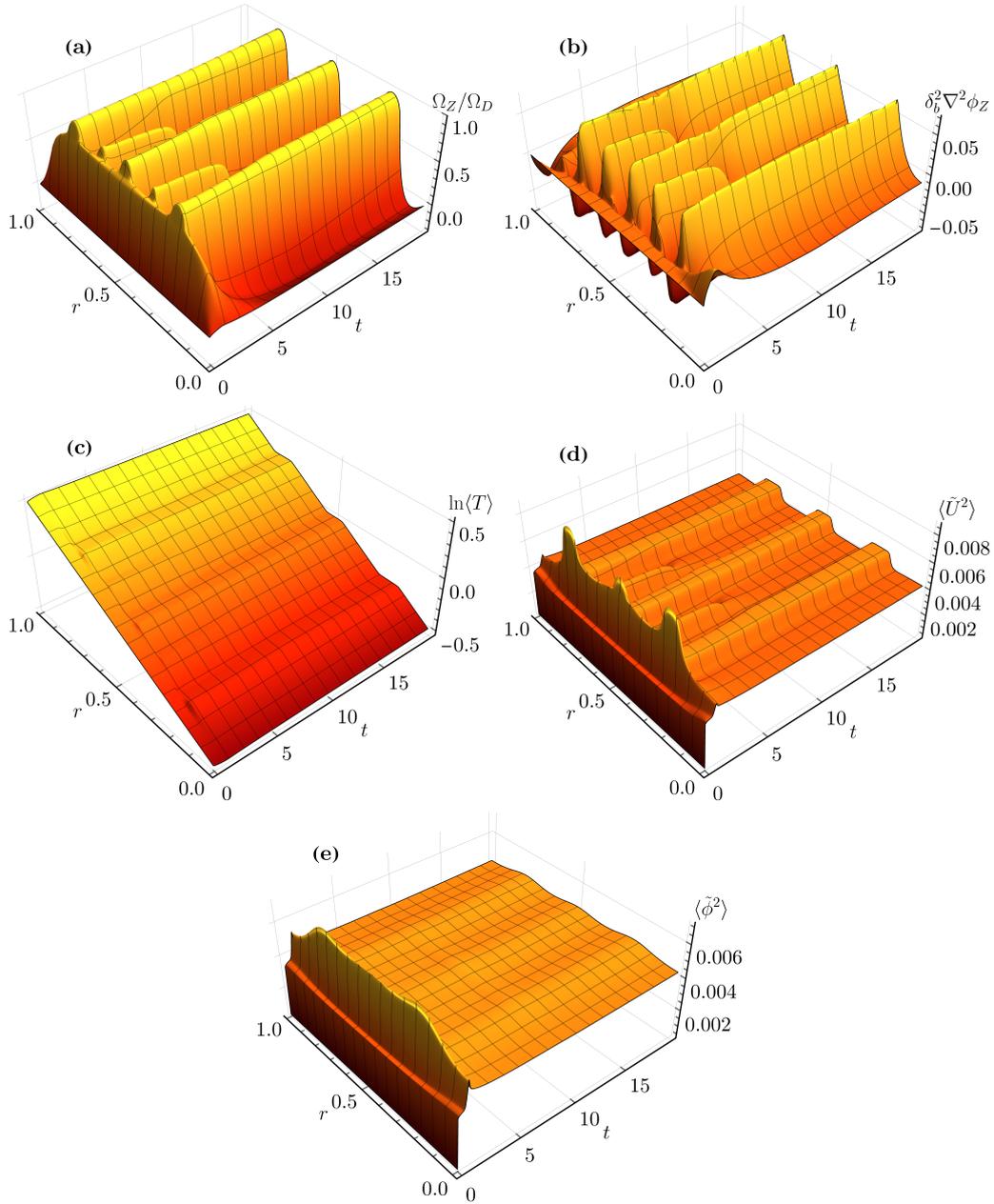


图 4.5 在表4.1中的参数下，剖面的演化情况

剖面存在两种明显分立的状态：一种几乎平坦，另一种更为陡峭。两种状态在空间上交替排列，从而形成了台阶状的准周期模式！我们将温度剖面几乎平坦的这些区域命名为 II-区，陡峭的区域命名为 I-区，如图 4.6 所示。在 II-区内，平均涡量的剖面也更平坦，同时更为重要的是，从图 4.6(a) 可知这些区域对应的 Ω_Z/Ω_D 达到了触发共振输运所需的阈值。所以在 II-区，共振输运占主导。与此同时，在 I-区，剖面较为陡峭， Ω_Z 没有达到共振条件，非共振输运占主导。

为了理解这样的剖面模式背后的物理过程需要讨论平均流的演化，因为剖面模式与共振输运有关，而共振输运触发与否完全取决于 Ω_Z 的值。所以我们从平

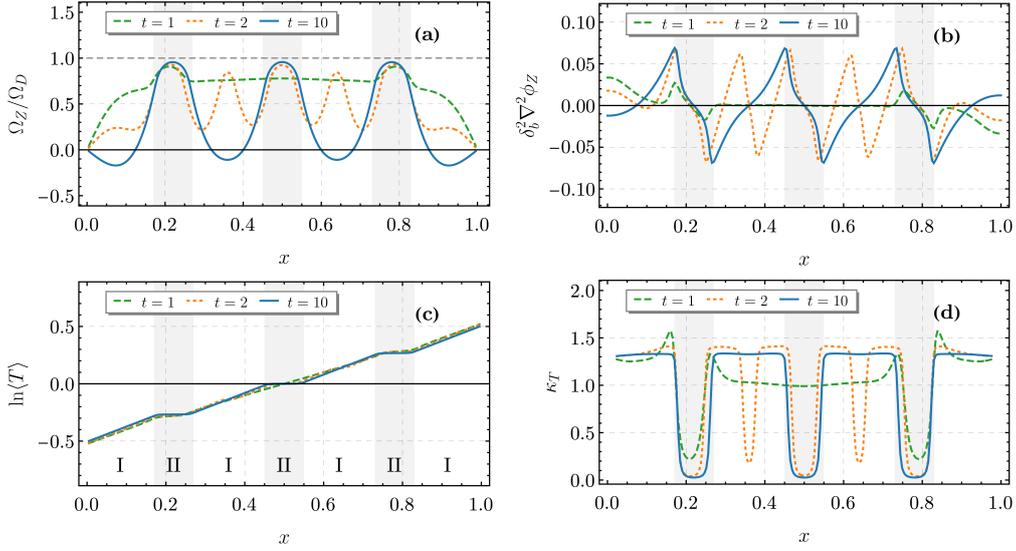


图 4.6 剖面演化在时间上的切片

均涡量的演化方程 (4.51) 入手分析反馈过程。该方程对空间求积分可以引入边界条件的效应:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\delta_b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_Z \right) dx &= -\frac{1}{C_i} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\vartheta \chi^n \frac{\partial}{\partial x} \frac{\ln\langle T \rangle}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \right) dx + \frac{1}{C_i} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\vartheta \chi \delta_b^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \phi_Z \right) dx \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} v_c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\Delta} \phi_Z dx \\ \implies \frac{\partial}{\partial t} (\delta_b^2 \Omega_Z) \Big|_{x_1}^{x_2} &= - \left(\frac{1}{C_i} \vartheta \chi^n \frac{\partial}{\partial x} \frac{\ln\langle T \rangle}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} + \left(\frac{1}{C_i} \vartheta \chi \delta_b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega_Z \right) \Big|_{x_1}^{x_2} + \left(v_c \delta_b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega_Z \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \end{aligned}$$

可以基于上面的表达式写出下面的演化方程 (4.59), 它可以帮助我们理解台阶形成的过程。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta_b^2 \Omega_Z) = -\frac{1}{C_i} \vartheta \chi^n \frac{\partial}{\partial x} \frac{\ln\langle T \rangle}{\sqrt{2\varepsilon_0}} + \frac{1}{C_i} \left(\vartheta \chi^n \frac{\partial}{\partial x} \frac{\ln\langle T \rangle}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \right) \Big|_{\text{B.C.}} + \vartheta \chi \delta_b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega_Z + v_c \delta_b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega_Z \quad (4.59)$$

在以上平均流的演化方程中, 我们观察到等号右侧第二项是一个明显的来自边界的温度梯度对 Ω_Z 的驱动。由于我们设定了一个恒定的边界条件 $\kappa_T^{\text{B.C.}}$, 这样的驱动将会始终存在。又因为 v_c 是个小量而 $\Omega_Z|_{\text{B.C.}} = 0$, 那么为让 Ω_Z 到达稳态, 就只剩下两种可能方式去平衡方程中的恒定驱动源。一种是由当地温度梯度去平衡, 即等号右侧第一项, 另一种是由 Ω_Z 本身的湍流耗散去平衡, 即等号右侧第三项, 如图 4.7 所示。不同的平衡方式最终导致了不同的平均剖面状态。

下面, 我们对两种状态以及达到它们所经历的反馈循环做出解释。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta_b^2 \Omega_Z) = -\frac{1}{C_i} \vartheta \chi^n \frac{\partial \ln \langle T \rangle}{\partial x \sqrt{2\varepsilon_0}} + \frac{1}{C_i} \left(\vartheta \chi^n \frac{\partial \ln \langle T \rangle}{\partial x \sqrt{2\varepsilon_0}} \right) \Big|_{\text{B.C.}} + \vartheta \chi(\Omega_Z) \delta_b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega_Z + \nu \delta_b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega_Z$$

I: Local Gradient Balanced
II: Resonant Dissipation Balanced

图 4.7 平衡边界温度梯度驱动的不同方式。方式 I: 当地温度梯度的增长, 或者方式 II: Ω_Z 的湍流共振耗散

- I-区内, 通常的湍流输运态, 其剖面更为陡峭。在这种状态下, 因为 $C_i \sqrt{2\varepsilon_0} \ll 1$ 以及 $\partial_x \ln \langle T \rangle \gg C_i \sqrt{2\varepsilon_0} \partial_x \bar{\Delta} \phi_Z$, 所以涡度梯度的贡献可以被忽略, 温度梯度在方程 (4.59) 中起主要作用。与此同时, 局域温度剖面也是由边界温度梯度 $\kappa_T^{\text{B.C.}}$ 驱动的。具体而言, 局域温度梯度在特征时间 $\tau_{\nabla T}$ 内朝着边界值增长, 该过程可以用下面的表达式描述 (这里假设了没有初始梯度):

$$\partial_x \ln \langle T \rangle |_{(t,x)} \sim (1 - e^{-t/\tau_{\nabla T}}) \partial_x \ln \langle T \rangle |_{\text{B.C.}}$$

然后, 局域温度梯度最终达到边界值附近。之后, 在流演化方程 (4.59) 中, 局域和边界的温度梯度的残余差值将会被 Ω_Z 的非共振湍流耗散和碰撞耗散所平衡。最终, Ω_Z 将会藉由局域温度梯度的平衡而达到一个准静态, 如图 4.7 所示。归结下来, 当 $\Omega_Z / \Omega_D < 1$ 时, 系统会到达温度剖面 and 涡量剖面都较为陡峭的状态。

- II-区内, 共振输运 (类雪崩) 态, 其剖面较为平坦。达成这一状态的反馈循环的详细过程可以用图 4.8 概括。当流 Ω_Z 增长时, 如果它超过了共振阈值, 即 $\Omega_Z > \Omega_D$, 那么共振输运将会被触发。从方程 (4.52) 和 (4.51) 可知, 共振输运同时出现两个方程中, 所以局域的温度和平均涡量输运都被显著地增强。于是, 首先是局域的温度剖面将变得平坦, 其梯度将如我们在第 4.2.4 节中假设的那样, 最终趋近于近临界梯度。其次, 平均涡度 (或平均流) 的演化方程 (4.59) 中, 来自温度梯度的贡献仅仅是非共振的, 且局域温度梯度很小。这使得来自边界梯度的恒定驱动无法被局域温度梯度平衡, 而只能被恰好增强了的 Ω_Z 本身的共振湍流输运所平衡, 如图 4.7 和图 4.8 所示。归结起来, 当 $1 < \Omega_Z / \Omega_D < 1.5$ 时, 系统状态为近临界的温度剖面 and 较为平缓的涡量剖面。

有了上面关于两种状态的反馈过程的理解, 我们可以将台阶形成过程的机制简单归结为: 在通常的湍流输运态之外, 共振湍流输运使得温度剖面 and 平均涡量剖面出现了第二种可能的状态。这两种状态在空间上交替出现, 则共振输运相关

$$\begin{aligned}
 & \text{Main Balancing} \\
 & \textcircled{1} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\delta_b^2 \Omega_Z) = -\frac{1}{C_i} \vartheta \chi^n \frac{\partial \ln \langle T \rangle}{\partial x \sqrt{2\varepsilon_0}} + \frac{1}{C_i} \left(\vartheta \chi^n \frac{\partial \ln \langle T \rangle}{\partial x \sqrt{2\varepsilon_0}} \right) \Big|_{\text{B.C.}} + \vartheta \chi \delta_b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega_Z + \nu \delta_b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega_Z \\
 & \textcircled{2} \\
 & \textcircled{3} \quad \frac{\partial}{\partial t} \ln \langle T \rangle = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\sqrt{2\varepsilon_0} C_i (1 - \vartheta) \chi \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\Delta \phi_Z}) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\chi \frac{\partial}{\partial x} \ln \langle T \rangle \right] + \chi_{\text{neo}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \langle T \rangle \\
 & \textcircled{4}
 \end{aligned}$$

图 4.8 II-区中的详细反馈过程。①边界值 $\partial_x \ln \langle T \rangle|_{\text{B.C.}}$ 大于局域值，从而驱动 Ω_Z 朝着正值的方向增长（边界值为正）。如果 $\Omega_Z > \Omega_D$ ，共振输运 χ^r 触发，②流的耗散和③局域温度剖面的耗散都被增强。④局域温度梯度变得平坦，同时反馈到 Ω_Z 的演化中。由于局域温度梯度变弱，所以边界温度梯度的驱动效应变得更强。⑤而 Ω_Z 的湍流输运由于已在第②步得到了增强，所以恰好可以平衡这一变强的边界驱动

的台阶便形成了。

上面给出的物理图像中仍然没有说明的问题是：台阶涌现的条件是什么？这个问题的答案其实就隐藏在图 4.8 给出的反馈循环中，我们接下来要把它发掘出来。

4.3.3 台阶出现的条件

从前面的讨论中我们知道，对反馈循环 II 的建立，最重要的一步是共振条件的触发，如图 4.7。并且触发必须发生在边界温度梯度驱动被当地温度梯度平衡之前，如图 4.8。也就是说共振输运被触发的关键是边界梯度 $\kappa_T^{\text{B.C.}}$ 足够强，以至于在驱动局域温度梯度到达边界梯度之前，先驱动平均流 Ω_Z 达到共振条件 $\Omega_Z > \Omega_D$ ！基于这一简单的逻辑，我们下面将给出台阶形成所需阈值条件的估计。

先从下面的简单的输运系统开始讨论，其中的输运系数为常数：

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2}{\partial r^2} w + \Phi(r, t) \quad (4.60)$$

$$w_x \Big|_{r=0} = w_r \Big|_{r=l} = q_0 \quad (4.61)$$

$$w \Big|_{t=0} = f(r), \quad 0 \leq r \leq l \quad (4.62)$$

其解析解 $w(r, t)$ 可以给出，同时该解在空间上的梯度也可以写出如下^[79]：

$$\frac{\partial w(r, t)}{\partial r} = -\frac{2}{l^2} \int_0^l \int_0^t \sum_{m=1}^{\infty} \pi m \Phi(\xi, \tau) \cos\left(\frac{\pi m \xi}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi m r}{l}\right) e^{-\frac{\pi^2 a m^2 (t-\tau)}{l^2}} d\tau d\xi$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{l^2} \int_0^l \sum_{m=1}^{\infty} \pi m f(\xi) \cos\left(\frac{\pi m \xi}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi m r}{l}\right) e^{-\frac{\pi^2 a m^2 t}{l^2}} d\xi \\
 & + q_0 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{\pi m} \sin\left(\frac{\pi m r}{l}\right) \left(1 - e^{-\frac{\pi^2 a m^2 t}{l^2}}\right)
 \end{aligned}$$

回到我们模型中关于温度剖面的方程 (4.52)，考虑共振输运还未被触发的情形。我们可以忽略其他项，仅仅只考虑来自边界梯度驱动的影响。然后将上面简单系统的结论应用到简化后的温度剖面演化方程，从而得到局域温度梯度在时空中的表达式如下：

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln\langle T \rangle \Big|_{(x,t)} \sim \frac{\partial}{\partial x} \ln\langle T \rangle \Big|_{\text{B.C.}} \left[1 - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{\pi m} \sin(\pi m x) \exp(-\pi^2 \chi^n m^2 t) \right] \quad (4.63)$$

这里的 $x \equiv \psi/L_\psi$ ，其中边界效应求和级数的第一部分结果为 1。上面的表达式告诉我们局域温度梯度会在一个如下的时间尺度上演化到边界值：

$$\tau_{\nabla T} \sim \frac{1}{\pi^2 \chi^n m^2} \quad (4.64)$$

将局域温度梯度的估计 (4.63) 代入到 Ω_Z 的演化方程 (4.59) 中，然后只保留温度梯度相关的项：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \Omega_Z & \sim \frac{1}{C_i \delta_b^2 \sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{\vartheta \chi^n}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln\langle T \rangle \Big|_{\text{B.C.}} - \frac{\partial}{\partial x} \ln\langle T \rangle \Big|_{(x,t)} \right] \\
 & = \frac{1}{C_i \delta_b^2 \sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{\vartheta \chi^n}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{\partial}{\partial x} \ln\langle T \rangle \Big|_{\text{B.C.}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{\pi m} \sin(\pi m x) e^{-\pi^2 \chi^n m^2 t}
 \end{aligned} \quad (4.65)$$

最终给出了共振输运触发前， Ω_Z 在边界热流驱动下的演化近似为：

$$\Omega_Z(t, x) \sim \frac{1}{C_i \delta_b^2 \sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{\vartheta \chi^n}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{\partial}{\partial x} \ln\langle T \rangle \Big|_{\text{B.C.}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{\pi m} \sin(\pi m x) \tau_{\nabla T} (1 - e^{-\pi^2 \chi^n m^2 t}) \quad (4.66)$$

回忆前面给出的共振输运触发的关键在局域温度梯度赶上边界值之前， Ω_Z 到达共振条件。而局域温度赶上边界值的特征时间尺度是 $\tau_{\nabla T}$ 如式 (4.64)。所以触发条件等效于式 (4.66) 中 $t = \tau_{\nabla T}$ 时有 $\Omega_Z(\tau_{\nabla T}, x) > \Omega_D$ ：

$$\Omega_Z(\tau_{\nabla T}, x) \sim \frac{1}{C_i \delta_b^2 \sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{\vartheta}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{\partial}{\partial x} \ln\langle T \rangle \Big|_{\text{B.C.}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{(\pi m)^3} \sin(\pi m x) \left(1 - \frac{1}{e}\right) > \Omega_D \quad (4.67)$$

于是给出了一个对边界温度梯度的阈值要求：

$$\implies \frac{\partial}{\partial x} \ln\langle T \rangle \Big|_{\text{B.C.}} > C_i \Omega_D \delta_b^2 \frac{e \sqrt{2\varepsilon_0}}{(e-1) \vartheta \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{(\pi m)^3} \sin(\pi m x)} \quad (4.68)$$

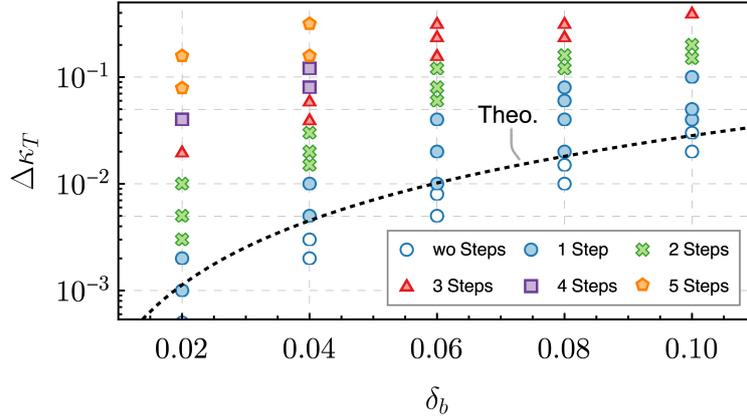


图 4.9 对边界梯度驱动 $\Delta\kappa_T^{\text{crit}}$ 的扫描。图中虚线来自对台阶出现阈值的估计 (4.70)，和数值上给出的结果符合的很好。随着 δ_b 的减小，触发阈值快速地降低，在相同的 δ_b 下，净驱动 $\Delta\kappa_T$ 越大，则台阶数量越多

上式分母中的级数是一个关于 $x \in [0, 1]$ 的函数，其值域为 $[0, 0.125]$ ，最大值取在 $x = 0.5$ 处。由于我们这里其实考虑的不是空间上所有位置，而是只要某处符合该阈值要求，所以这里取求和级数的最大值。其中的系数 $e/(e-1)$ 简化为 1。那么共振输运能被触发时所需要的驱动阈值如下：

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \ln\langle T \rangle \right|_{\text{B.C.}} > C_i \Omega_D \frac{8\delta_b^2 \sqrt{2\varepsilon_0}}{\vartheta} \quad (4.69)$$

但是这里的阈值是针对初值 $\partial_x \ln\langle T \rangle = 0$ 的条件得出的，恢复初值的影响后得到下面的最终结果：

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \ln\langle T \rangle \right|_{\text{B.C.}} - \left. \frac{\partial}{\partial x} \ln\langle T \rangle \right|_{\text{I.N.}} > \Delta\kappa_T^{\text{crit}} \equiv C_i \Omega_D \frac{8\delta_b^2 \sqrt{2\varepsilon_0}}{\vartheta} \quad (4.70)$$

这里的 $\Delta\kappa_T^{\text{crit}}$ 即为触发台阶现象时边界热流（或梯度）所需达到的条件。因为 $x = \psi/L_\psi$ ， $L_\psi = -B_\theta R_0 a$ ， $d\psi = -B_\theta R_0 dr$ ，所以 $dx = dr/a$ 。同时 $C_i = q\omega_0 L_\psi/T_i$ ， Ω_D 回归到简写前的形式 $\Omega_D T_0/\omega_0$ ， δ_b 也回归到简写前到形式 δ_b/a 。上面的阈值条件 (4.70) 也可以转化到小半径坐标：

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \ln\langle T \rangle \right|_{\text{B.C.}} - \left. \frac{\partial}{\partial r} \ln\langle T \rangle \right|_{\text{I.N.}} < -\frac{q}{T_0} \Omega_D T_0 B_\theta R_0 \left(\frac{\delta_b}{a} \right)^2 \frac{8\sqrt{2\varepsilon_0}}{\vartheta} \quad (4.71)$$

注意这里的 $\Omega_D T_0$ 为离子在 α 方向上的进动速度，故单位为弧度每秒。

下面以参数 $C_i = 0.1$ ， $\Omega_D = 1$ ， $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ ， $\vartheta = 0.2$ 为例，改变 δ_b 的值，扫描我们的湍流-剖面系统。同时，设 $\partial_x \ln\langle T \rangle|_{\text{I.N.}} = 1$ 然后变化 $\partial_x \ln\langle T \rangle|_{\text{B.C.}}$ ，以观察净驱动对台阶数量的影响，最终得到了图 4.9。图中不同的记号代表了观察到的台阶数量，我们对触发台阶的阈值估计 (4.70) 标注为图中虚线，估计值符合实际数值计算的 $\Delta\kappa_T$ 阈值。不过式 (4.70) 并没有包括 χ_{neo} 和 v_c 的影响，它们在 $\Delta\kappa_T$ 十分接

近阈值条件的时候可能会发挥更大的作用。另外，由于输运系数模型本身考虑到计算的平滑性，在 $\Omega_Z = \Omega_D$ 附近存在一定的展宽，这也可能会对结果有一定的影响。式 (4.70) 和图 4.9 告诉我们， δ_b 越小则触发台阶所需边界热流越低，且两者之间是二次的关系；更强的边界驱动也会带来更多的台阶。

4.3.4 台阶的特征

由 Ω_Z 的演化方程 (4.59) 可知，在 II-区中的稳态剖面必然满足边界温度梯度驱动和 Ω_Z 的局域湍流共振耗散的基本平衡，即

$$\left(\frac{1}{C_i} \chi^n \frac{\partial \ln\langle T \rangle}{\partial x} \sqrt{2\varepsilon_0} \right) \Big|_{\text{B.C.}} \sim \chi^r \delta_b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega_Z$$

在上式中，因为 $\partial_x \ln\langle T \rangle|_{\text{B.C.}} = \text{Const.}$ ，所以 II-区中的 Ω_Z 可以近似为下面的二次函数形式：

$$\Omega_Z(x) \rightarrow K_{\text{II}} x^2 \quad (4.72)$$

其中， K_{II} 是一个参数。把这种形式的 Ω_Z 代入平衡关系中得到 K_{II} 的表达式：

$$K_{\text{II}} \sim \frac{1}{\delta_b^2 C_i \sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{\chi^n}{\chi^r} \left(\frac{\partial \ln\langle T \rangle}{\partial x} \right) \Big|_{\text{B.C.}} \quad (4.73)$$

回忆前面给出的 $\chi(\Omega_Z)$ 模型，即图 4.2，在平台区的半宽度内 $w_{\text{II}}/2$ ， Ω_Z 应当从实际平均涡量剖面的最大值处 Ω_Z^{Max} 减少到可以触发共振输运的最小值 Ω_Z^{Crit} ，如图 4.10 所示。在式 (4.72) 中引入 w_{II} 后可得在空间长度 $w_{\text{II}}/2$ 内 Ω_Z 的变化量：

$$K_{\text{II}} \left(\frac{w_{\text{II}}}{2} \right)^2 \sim \Omega_Z^{\text{Max}} - \Omega_Z^{\text{Crit}} \equiv \Delta\Omega_Z$$

其中 $\Omega_Z^{\text{Max}} - \Omega_Z^{\text{Crit}}$ 定义为 $\Delta\Omega_Z$ ，它和定义的输运系数模型（图 4.2）中的展宽 w_Ω 有关。然后上面的式子结合前面给出的 K_{II} 的表达式便可得到台阶宽度的估计：

$$w_{\text{II}} \sim 2 \sqrt{\frac{\Delta\Omega_Z}{K_{\text{II}}}} \sim 2\delta_b \sqrt{\Delta\Omega_Z \frac{\chi^r}{\chi^n} \frac{C_i \sqrt{2\varepsilon_0}}{\partial_x \ln\langle T \rangle|_{\text{B.C.}}}} \quad (4.74)$$

以 $\chi^r/\chi^n = 100$ ， $C_i = 0.1$ ， $\varepsilon_0 = 1/4$ 为例。在我们定义的 $\chi(\Omega_Z)$ 模型中，共振条件附近的展宽为 $w_\Omega = 0.2$ ，所以可以认为这里的 $\Delta\Omega_Z/\Omega_D$ 大概取值在 0.2 左右。将 w_{II} 随着 δ_b 在不同 $\Delta\kappa_T$ 下的关系画出如图 4.11。由于在 $\Omega_Z \simeq \Omega_D$ 之后， Ω_Z 仍然会有缓慢增长，从而导致 $\Delta\Omega_Z$ 也有缓慢增长，进而使得台阶区的典型宽度少量的增加，最终在剖面结果中表现为部分台阶的融合。

在下图 4.12 的例子中，我们采用相同的 $\Delta\kappa_T$ 只改变 κ_T^{INI} 的值。结果显示更高的初值梯度可以减少台阶宽度，从而允许更多台阶出现，正如式 (4.74) 所预测的那样。不过改变初始梯度后，如果要维持多出来的台阶，可能还需要增加边界梯

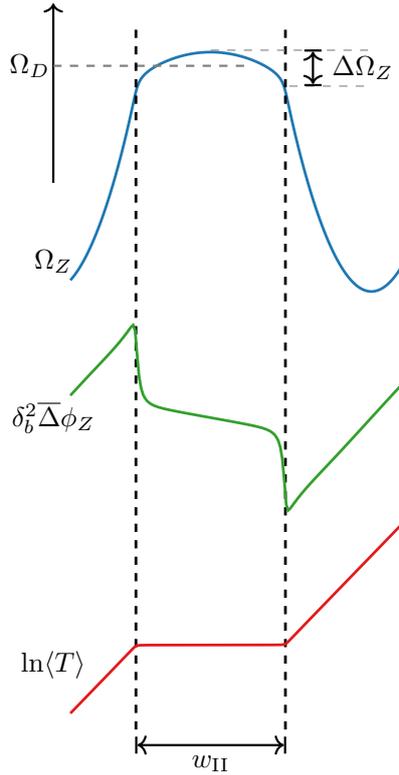


图 4.10 处于共振触发范围的速度 Ω_Z 和平台区的宽度 w_{II} 对应

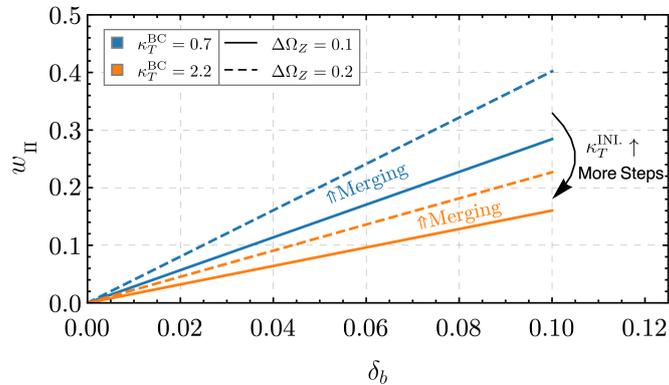


图 4.11 台阶宽度随 δ_b 的变化，同时比较了不同 $\Delta\Omega_Z$ 和 $\kappa_T^{B.C.}$ 的影响。这里的 $\kappa_T^{B.C.} = \kappa_T^{INI.} + \Delta\kappa_T$ 。(a) 在相同的边界驱动下，例如 $\Delta\kappa_T = 0.2$ ，更高的初始温度梯度将导致更小的台阶宽度，从而倾向于产生更多台阶。(b) 对一组 $(\delta_b, \kappa_T^{B.C.})$ 参数来说，当流缓慢地逐渐增长时， $\Delta\Omega_Z$ 也会缓慢地增长，比如图中从 0.1 到 0.2，这在剖面中体现为台阶的融合

度，不然就会像图 4.12(II) 那样发生融合。这一点可以从熵的角度理解。我们的剖面演化系统由于边界热流输入是一个非平衡系统，其中更多的台阶意味着系统更“规则”，对应于系统熵减，更强的驱动有助于系统朝熵减的方向进一步演化^[80]。

总结下来：一方面，边界处总的梯度 $\kappa_T^{B.C.} = \kappa_T^{INI.} + \Delta\kappa_T$ 决定了平台的宽度，从而限制了可以出现的最大台阶数量。另一方面，净驱动 $\Delta\kappa_T$ 越大，那么台阶的数量也就越多。

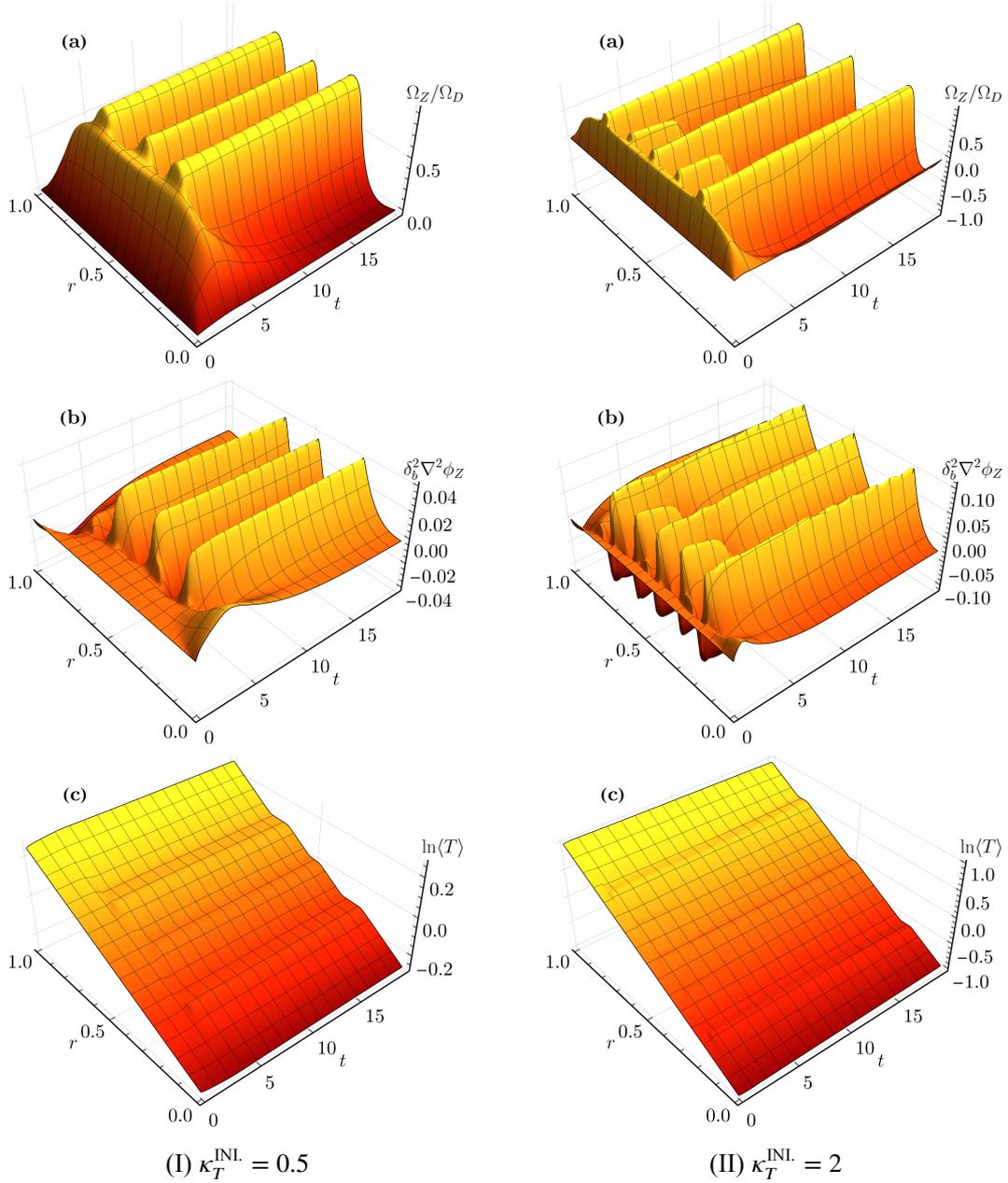
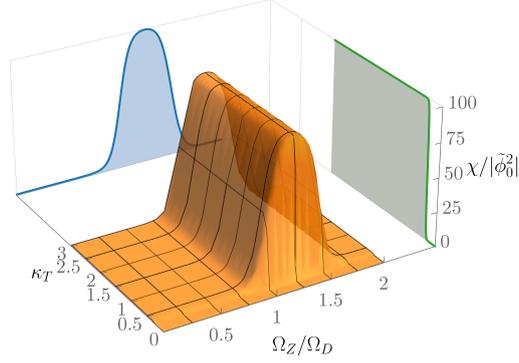


图 4.12 $\partial_x \ln(T)$ 的初值可以影响台阶尺寸和台阶数量, 这里 $\Delta\kappa_T = 0.2$, $\delta_b = 0.06$

4.3.5 关于实现临界剖面的讨论

正如本论文在第 4.2.4 节中讨论的那样, χ 应当包含温度梯度 κ_T 的影响从而最终使得温度剖面在共振输运时处在近临界态。引入这样的依赖关系的最简单的方法就是像图 4.13 中那样简单地加入一个关于温度梯度的双曲正切函数。在数值计算中使用这样的输运系数模型后, 我们发现新经典输运系数将会发挥更为重要的作用, 并且流也并不总是由共振 χ 输运而达到饱和。另外, $\chi^r/\chi^n \sim \omega_R^2/\gamma^2$ 这一比值应当在 κ_T 非常接近线性不稳定性临界值的时候变得非常大, 因为此时 γ 接近于 0 而 ω_R 几乎不变, 见图 2.3。我们没有找到包含这一效应的简单方法, 并且这


 图 4.13 在 χ 模型中引入 κ_T 影响的一个例子

样似乎也会带来一些时间尺度的问题。根据测试结果，我们认为在这样简单的系统中实现近临界态较为困难，继续在这个问题上花费过多的精力会使得本文变得冗长。理论上来说借助更复杂的模型或许可以使得剖面达成近临界态，但是借用经济学的术语来说，这可能是在追寻边际收益。

4.4 小结

在本章中，我们研究了势涡守恒系统中平均剖面的演化过程。我们首先利用了准线性近似建立了热通量、涡量通量、势涡通量和温度剖面、平均涡度剖面间的关系。将这些通量代入剖面演化方程后使得方程闭合。同时，基于第二章湍流自扩散问题的一些结论，我们引入了以 $\langle \tilde{U}^2 \rangle$ 表征的湍流强度演化方程，然后借助格林函数将 $\langle \tilde{U}^2 \rangle$ 转化为 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 。通量中各个输运系数的表达式告诉我们，捕获离子进动可以借助 $E \times B$ 平均流的多普勒效应实现和捕获离子模 (TIM) 之间的共振，进而引发共振输运。我们利用了从 Darnet 模型得到的色散关系模型，并且假设了湍流谱为双 Lorentz 谱，然后借助色散关系拟合参数中存在的量级差异，最终得到了简化的输运系数表达式。根据系数的表达式，本章得出三个重要结论：

1. 共振条件可以转化为对 $E \times B$ 平均流 Ω_Z 的要求，即 $1 < \Omega_Z/\Omega_D < 1.5$ ；
2. 共振和非共振输运系数的比值近似为： $\chi^r/\chi^n \sim (\omega_R/\gamma)^2 \sim \mathcal{O}(10) - \mathcal{O}(100)$ ；
3. 众多系数可以归一化到其中一个系数上。

基于这些结论，我们采用了一个关于 Ω_Z 的分段函数作为输运系数模型，将剖面演化模型简化为 (4.51) - (4.57)。于是，综合剖面演化方程、湍流强度演化方程和输运系数模型，最终得到了一个包含共振输运的湍流-剖面演化系统。

我们对该系统首先进行了数值求解，在设定的边界条件中，令 $\partial_x \ln\langle T \rangle|_{\text{B.C.}} \equiv \kappa_T^{\text{B.C.}}$ 为恒定值。结果显示，当边界净驱动 $\kappa_T^{\text{B.C.}} - \kappa_T^{\text{Ini.}}$ 超过一定值之后，可以观察到剖面台阶的出现，其主要特征是温度剖面出现的台阶状准周期模式，同时伴随着 $E \times B$ 平均流中的准周期模式。以温度剖面的平台和阶沿为区分，可以将剖面

区域分为两类：在平台区，由于 Ω_Z 处在共振条件范围内，共振输运被触发，温度剖面变得平缓，接近所谓的近临界剖面（Near Marginal），平均涡度（或 $E \times B$ 平均流）的饱和也主要由共振输运决定，剖面较平坦；在阶沿区，非共振湍流输运（通常的湍流输运）占主导，剖面比平台区更陡峭。湍流强度本身在台阶不同区域的差异不大，因为格林函数的作用，使得 $\langle \tilde{U}^2 \rangle$ 中可能出现的褶皱被极大地抹平了。

通过研究平台区剖面演化最终达到准稳态所经历的反馈过程，我们得出台阶触发所需满足的条件是：边界热流驱动源同时驱动 $E \times B$ 平均流和局域温度梯度，但 Ω_Z 增长达成共振条件的时间要快于局域温度梯度到达边界温度梯度的时间。这一条件对边界净驱动热流的大小提出了要求，即 $\Delta\kappa_T > \Delta\kappa_T^{\text{crit}}$ 时可出现台阶。我们给出的解析临界条件 $\Delta\kappa_T^{\text{crit}}$ （见式 (4.70)）与数值扫描系统 (4.51) - (4.57) 参数后给出的数值临界值相符，如图 4.9。

根据 Ω_Z 在平台区演化达到准稳态需满足条件：边界恒定热流驱动同 Ω_Z 的共振湍流耗散平衡，我们得出了台阶宽度的估计值 (4.74)。台阶宽度主要受三个因素决定：

1. 正比于香蕉轨道宽度 δ_b ；
2. 正比于 $\sqrt{\chi^r/\chi^n}$ ，同时由于共振和非共振输运系数的比值近似为 TIM 实频率和增长率的比值的平方，故台阶宽度正比于 ω_R/γ ；
3. 反比于 $\sqrt{\kappa_T^{\text{B.C.}}}$ ，即边界热流越大，台阶宽度越窄。

不过需要强调的是，(4.74) 只是给出了台阶宽度的估计，受到上面列举的因素影响可使台阶宽度变窄。但这只意味着可以存在更多的台阶，只是一个上限值。真正要使得系统产生并长时间维持较多的台阶，还是需要更强边界净驱动。所以更强的边界净驱动带来更多的台阶这一结论包含两方面的原因：一是在初始温度梯度相同的情况下，更高的边界净驱动使得总的边界温度梯度提高，于是单个台阶宽度变窄，相同空间中可容纳的台阶更多；二是边界净驱动更强，系统得以朝着熵减的方向演化的更远，形成更多的结构。

综上，本章的工作集中在对剖面演化过程的研究上，我们发现了由共振输运触发而引起的剖面台阶现象（即 $E \times B$ 台阶），探讨了演化过程中的反馈机制，给出了台阶触发条件、台阶宽度估计等解析结果。同时这项工作也给出了一种带状流无碰撞饱和的新机制，即通过带状流的共振耗散饱和。台阶的出现也意味着在托卡马克中可能存在一些新的运行模式，比如所谓的“Improved L mode”。台阶宽度这一介观尺度与回旋波姆定标率失效之间也可能存在潜在联系。

第5章 结论

本论文基于第一性原理，从一个简化的但是具有代表性的动理学系统，即 Darnet 模型出发，推导出了一个势涡的守恒系统 (2.15) - (2.16)。基于这一势涡系统，本论文从理论推导和数值计算的角度研究托卡马克中的两个介观演化问题：湍流自扩散和 $E \times B$ 台阶，结果体现为两方面。

第一是推导出了一个包含显式非局域性的湍流自扩散模型。借助势涡 $\tilde{U} = \tilde{\phi} - \overline{\Delta\tilde{\phi}}$ 的演化方程的守恒性，我们推导出了一个关于扰动电势强度 $\langle \tilde{\phi}^2 \rangle$ 的演化方程：

$$\partial_t \langle \tilde{\phi}^2 \rangle = \mathcal{G} \otimes [\text{Nonlinear Diffusion}] + \mathcal{G} \otimes (\gamma_L(r) \langle \tilde{\phi}^2 \rangle) - \frac{D_0}{l_r^2} \langle \tilde{\phi}^2 \rangle^2$$

其中显式地包含了非局域效应，即式中同格林函数 $\mathcal{G} \propto \exp(-|x - x'|/\delta_b)$ 的卷积。将势涡 \tilde{U} 转换为 $\tilde{\phi}$ 时引入了格林函数，其中的非局域性来源于捕获离子的极化电荷效应。卷积核的宽度为数个香蕉轨道宽度，代表了非局域性的大小。该非局域性原本隐藏在 (3.10) 中，我们借助格林函数，将这样的非局域性显式地表达出来。含有非局域性的模型 (3.26) 相比传统模型 (3.25) 加快了湍流自扩散过程中的锋面传播速度，并且加深了锋面穿透进入线性稳定区的深度。该模型相比于传统的模型有着更为严格的推导过程，是一个微分-积分方程，并且从理论上给出了一种新的托卡马克的内秉非局域性——理论上来说，只要托卡马克等离子体碰撞率处在香蕉区，那么这种非局域性在湍流中都应该起作用。

第二，我们推导、建模了一套剖面台阶演化的模型，并且发现共振输运在 $E \times B$ 台阶形成中发挥了重要作用。为了研究势涡系统中的剖面演化过程 (2.10) 和 (2.12)，我们首先使用准线性近似得到通量表达式，然后借助从 Darnet 模型得出的色散关系模型和双洛伦茨谱建立了输运系数模型，进而化简了通量表达式。将通量表达式代入方程，最终闭合了剖面演化方程。同时加入了用 $\langle \tilde{U}^2 \rangle$ 表征的湍流强度演化模型，最终形成了一个湍流-剖面演化系统。

在简化输运系数的过程中，我们发现当 $E \times B$ 环向平均流频率 Ω_Z 接近捕获离子进动频率 Ω_D 时，捕获离子模和捕获离子进动间可以实现共振。这导致了通量中的输运系数出现共振输运分量，共振条件可近似为 $1 < \Omega_Z/\Omega_D < 1.5$ 。有趣的是，虽然几乎所有通量中的输运系数都包含这样的共振和非共振分量，但是在涡量通量中，温度梯度仅仅贡献非共振分量。因为温度梯度前的输运系数中的响应函数包含两个部分，代入对应共振条件后几乎相互抵消，如式 (4.11)。

我们利用数值和解析方法研究了得到的湍流-剖面系统，结果显示在边界热流驱动下，剖面出现了两种由 $E \times B$ 平均流 Ω_Z 决定的输运和剖面状态。一种是由共振输运调控的共振（类雪崩）态，其温度剖面较为平缓（近临界状态）；二是由非共振湍流输运调控的非共振态，其剖面更为陡峭。最为有趣的是这两种剖面状态在空间中呈现出类似台阶的准周期交替模式，也就是说我们实现了所谓的 $E \times B$ 台阶现象。论文从理论的角度，对台阶现象进行了分析：

- 借助平均流 Ω_Z 的形式演化方程，论文分析了台阶建立过程中的反馈过程，如图 4.7。平均流是触发共振和非共振条件的关键，而其本身的演化受恒定边界热流的驱动，其演化中存在两种平衡边界热流的方式：局域热流平衡或 Ω_Z 的共振输运平衡。
- 基于反馈过程的分析，我们给出了触发台阶现象所需要的条件是：边界热流足够强，以至于在驱动局域温度梯度到达边界梯度之前，先驱动平均流 Ω_Z 达到共振条件。这一条件转化为对边界热流的要求 (4.70)。
- 平台区内平均流 Ω_Z 到达准稳态后需要实现边界热流驱动与 Ω_Z 共振输运之间的基本平衡，据此可得出平台区宽度的估计 (4.74)。其中，台阶宽度受到了香蕉轨道宽度、共振和非共振输运系数之比、边界热流驱动等的影响。

同以往 $E \times B$ 台阶理论研究比较：我们得到了捕获离子进动、 $E \times B$ 平均流、捕获离子模式三者作用达成共振这一新机制，其引发的共振输运是剖面台阶形成的新机制。同时平均流的共振输运也给出了一种带状流的无碰撞饱和和机制^[81]。湍流强度演化方程也被包含在了系统演化中，但是在台阶形成过程中湍流本身的强度并不起到决定性的作用。我们首次给出了台阶触发所需边界热流条件、首次给出了和共振/非共振输运系数相关的台阶宽度的估计。

在未来的研究方向上，显式非局域湍流自扩散模型的一个可能的应用方向是台基湍流，因为这里的等效非局域性 δ_b/L_T 并不是小量。正如在论文 3.2 节中看到的，更窄的不稳定区间对应的等效非局域性更大，可能使得湍流自扩散的相对影响更强。另外，台基非局域性可能是一种简化效应，因为它会抹平台基中的微湍流^[82]。值得一提的是，Waltz 等在 [33] 曾猜测回旋动理学模拟中可能存在类似 (1.7) 的非局域性，用以解释过去数个动理学模拟程序给出的离子热输运定标率从所谓的“Bohm”到 gyro-Bohm 的现象^[4, 31]。该非局域增长项和本论文从理论上得出的非局域增长率 (3.26) 在形式上是一致的，并且我们的结果说明这样的非局域性可能来源于捕获离子的极化电荷效应。所以显式非局域模型在理解和简化大规模数值计算上有潜在的应用。在湍流自扩散中包含带状流也是一个重要的研究方向，因为湍流产生了带状流，所以湍流的传播可能会拖拽带状流。要回答这个问

题，实际上不是简单地把带状流包含进湍流自扩散方程就可以了，应该认识到温度、密度剖面也必然发挥了作用。而我们得到的湍流-剖面系统显然更适合研究这个问题。最后，还可以将模型拓展应用到高能量粒子驱动的湍流上，特别是对高能粒子模扰动 (EPM)^[83, 84]。因为在 EPM 中， δ_b 的尺度可以很大，从而使得显式非局域性更强。

对台阶模型的相关结果来说，未来首先考虑的是在大型模拟程序上的验证。比如研究台阶触发条件和台阶宽度随等离子体参数的定标关系，分析平均流结构和捕获离子进动间是否存在关联等。其次是，现有的一些实验和模拟结果显示内部输运垒的形成和快离子的共振效应存在联系，结果会显著地增强装置的约束^[85, 86]。结合本项研究中 $E \times B$ 台阶形成与捕获离子共振的关系，可以看到 $E \times B$ 台阶和内部输运垒似乎存在某些联系。这些联系值得更多的理论、模拟、实验的研究。更有趣的是 $E \times B$ 台阶其实预示着在一定条件下，或许可以实现多级内部输运垒。特别是对未来的更大型的装置，台阶的数量可能会增多。正如我们在 [9] 中看到的，更多的台阶对约束的改善效果可能会更显著，从而意味着 $E \times B$ 台阶有可能进一步启发类似于约束增强型 L 模的新运行模式。在获得进一步的模拟结果后可以考虑设计实验方案研究。最后，由于我们的势涡守恒系统建立在对捕获离子模的研究上，所以同样地，在更远的将来，这一台阶模型也可能进一步拓展到高能量粒子和湍流相互作用这类问题中。

本研究存在一些局限性。首先是，整体势涡系统建立在捕获离子模上，其频率较低，是一种类交换模（也可称为长波 ITG）。在现有的研究中，对捕获离子模 (TIM) 的讨论并不多，不过也有一些研究认为 TIM 在托卡马克中的一些物理过程中发挥了重要的作用^[87]。然后是本论文在讨论剖面台阶的过程中，使用了一个近临界剖面假设。因为要真正实现近临界剖面较为复杂，可能需要使用精细微调的输运系数模型等方法，这些问题将在未来的研究中进一步讨论和优化。

总体来说，本论文从理论的角度，研究了托卡马克中的湍流自扩散和 $E \times B$ 台阶这两类介观物理问题。通常的湍流自扩散可以归结为势涡 (\tilde{U}) 的非共振输运，其中可能包含非局域效应。温度剖面、平均涡度剖面（两者构成了平均势涡）在共振输运的作用下可以形成台阶状准周期模式。

参考文献

- [1] Wesson J. Tokamaks[M]. 4th ed. Oxford Science Publications, 2011.
- [2] Miyamoto K. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion[M]. Springer-Verlag, 2005.
- [3] Petty C C, Luce T C, Pinsker R I, et al. Gyroradius scaling of electron and ion transport[J]. Physical Review Letters, 1995, 74(10): 1763-1766.
- [4] Lin Z, Ethier S, Hahm T S, et al. Size scaling of turbulent transport in magnetically confined plasmas[J]. Physical Review Letters, 2002, 88(19).
- [5] Petty C C. Sizing up plasmas using dimensionless parameters[J]. Physics of Plasmas, 2008, 15(8): 080501.
- [6] Diamond P H, Itoh S I, Itoh K, et al. Zonal flows in plasma - a review[J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2005, 47(5): R35-R161.
- [7] Dif-Pradalier G, Hornung G, Ghendrih P, et al. Finding the elusive $E \times B$ staircase in magnetized plasmas[J]. Physical Review Letters, 2015, 114(8).
- [8] Ashourvan A, Diamond P H. On the emergence of macroscopic transport barriers from staircase structures[J]. Physics of Plasmas, 2017, 24(1): 012305.
- [9] Ashourvan A, Nazikian R, Belli E, et al. Formation of a high pressure staircase pedestal with suppressed Edge Localized Modes in the DIII-D Tokamak[J]. Physical Review Letters, 2019, 123(11): 115001.
- [10] Xu G S, Yang Q Q, Yan N, et al. Promising high-confinement regime for steady-state fusion[J]. Physical Review Letters, 2019, 122(25): 255001.
- [11] Dif-Pradalier G, Diamond P H, Grandgirard V, et al. On the validity of the local diffusive paradigm in turbulent plasma transport[J]. Physical Review E, 2010, 82(2): 025401.
- [12] Choi M J, Jhang H, Kwon J M, et al. Experimental observation of the non-diffusive avalanche-like electron heat transport events and their dynamical interaction with the shear flow structure[J]. Nuclear Fusion, 2019, 59(8): 086027.
- [13] Liu W, Chen Y, Ke R, et al. Evidence of $E \times B$ staircase in HL-2A L-mode tokamak discharges[J]. Physics of Plasmas, 2021, 28(1): 012512.
- [14] Kaye S M, Levinton F M, Stutman D, et al. Confinement and local transport in the national spherical torus experiment (NSTX)[J]. Nuclear Fusion, 2007, 47(7): 499-509.
- [15] Garbet X, Laurent L, Samain A, et al. Radial propagation of turbulence in tokamaks[J]. Nuclear Fusion, 1994, 34(7): 963-974.
- [16] Hahm T S, Diamond P H, Lin Z, et al. Turbulence spreading into the linearly stable zone and transport scaling[J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2004, 46(5A): A323-A333.
- [17] Sugama H, Wakatani M. Statistical analysis of anomalous transport in resistive interchange turbulence[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1992, 61(9): 3166-3177.

-
- [18] Diamond P H, Lebedev V B, Newman D E, et al. Dynamics of transition to enhanced confinement in reversed magnetic shear discharges[J]. *Physical Review Letters*, 1997, 78(8): 1472-1475.
- [19] Kim E J, Diamond P H, Malkov M, et al. Non-perturbative models of intermittency in drift-wave turbulence: towards a probabilistic theory of anomalous transport[J]. *Nuclear Fusion*, 2003, 43(9): 961-968.
- [20] Gürçan Ö D, Diamond P H, Hahm T S, et al. Dynamics of turbulence spreading in magnetically confined plasmas[J]. *Physics of Plasmas*, 2005, 12(3): 032303.
- [21] Gürçan Ö D, Diamond P H, Hahm T S. Radial transport of fluctuation energy in a two-field model of drift-wave turbulence[J]. *Physics of Plasmas*, 2006, 13(5): 052306.
- [22] Chen N, Wei S, Wei G, et al. Soliton generation and drift wave turbulence spreading via geodesic acoustic mode excitation[J]. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2021, 64(1): 015003.
- [23] Garbet X, Sarazin Y, Imbeaux F, et al. Front propagation and critical gradient transport models[J]. *Physics of Plasmas*, 2007, 14(12).
- [24] Naulin V, Nielsen A H, Rasmussen J J. Turbulence spreading, anomalous transport, and pinch effect[J]. *Physics of Plasmas*, 2005, 12(12).
- [25] Wang Z H, Diamond P H, Gürçan Ö D, et al. Turbulence propagation in heat flux-driven plasmas: implications for temperature profile structure[J]. *Nuclear Fusion*, 2011, 51(7).
- [26] Guo Z B, Diamond P H. Bistable dynamics of turbulence spreading in a corrugated temperature profile[J]. *Physics of Plasmas*, 2017, 24(10).
- [27] McKee G R, Petty C C, Waltz R E, et al. Non-dimensional scaling of turbulence characteristics and turbulent diffusivity[J]. *Nuclear Fusion*, 2001, 41(9): 1235-1242.
- [28] Hennequin P, Sabot R, Honore C, et al. Scaling laws of density fluctuations at high-k on Tore Supra[J]. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2004, 46(12B, SI): B121-B133.
- [29] Budny R V, Ernst D R, Hahm T S, et al. Local transport in joint European Tokamak edge-localized, high-confinement mode plasmas with H, D, DT, and T isotopes[J]. *Physics of Plasmas*, 2000, 7(12): 5038-5050.
- [30] Lin Z, Hahm T S. Turbulence spreading and transport scaling in global gyrokinetic particle simulations[J]. *Physics of Plasmas*, 2004, 11(3): 1099-1108.
- [31] McMillan B F, Lapillonne X, Brunner S, et al. System size effects on gyrokinetic turbulence[J]. *Physical Review Letters*, 2010, 105(15).
- [32] Jolliet S, Bottino A, Angelino P, et al. A global collisionless PIC code in magnetic coordinates[J]. *Computer Physics Communications*, 2007, 177(5): 409-425.
- [33] Waltz R E, Candy J. Heuristic theory of nonlocally broken gyro-Bohm scaling[J]. *Physics of Plasma*, 2005, 12(7): 072303.
- [34] Yi S, Kwon J M, Diamond P H, et al. Turbulence spreading as a non-local mechanism of global confinement degradation and ion temperature profile stiffness[J]. *Nuclear Fusion*, 2015, 55(9).
- [35] Yi S, Kwon J M, Diamond P H, et al. Effects of q-profile structure on turbulence spreading: A fluctuation intensity transport analysis[J]. *Physics of Plasmas*, 2014, 21(9).

- [36] Hahm T S, Diamond P H, Lin Z, et al. On the dynamics of edge-core coupling[J]. *Physics of Plasmas*, 2005, 12(9): 090903.
- [37] Wang W X, Hahm T S, Lee W W, et al. Nonlocal properties of gyrokinetic turbulence and the role of $E \times B$ flow shear[J]. *Physics of Plasmas*, 2007, 14(7).
- [38] Nazikian R, Shinohara K, Kramer G, et al. Measurement of turbulence decorrelation during transport barrier evolution in a high-temperature fusion plasma[J]. *Physical Review Letters*, 2005, 94(13).
- [39] McKee G R, Fonck R J, Gupta D K, et al. Plasma turbulence imaging via Beam Emission Spectroscopy in the core of the DIII-D tokamak[J]. *Plasma and Fusion Research*, 2007, 2: S1025-S1025.
- [40] Estrada T, Hidalgo C, Happel T. Signatures of turbulence spreading during the H-L back-transition in TJ-II plasmas[J]. *Nuclear Fusion*, 2011, 51(3).
- [41] Jiang M, Zhong W, Xu Y, et al. Influence of $m/n = 2/1$ magnetic islands on perpendicular flows and turbulence in HL-2A Ohmic plasmas[J]. *Nuclear Fusion*, 2018, 58(2): 026002.
- [42] Choi M J, Bardóczy L, Kwon J M, et al. Effects of plasma turbulence on the nonlinear evolution of magnetic island in tokamak[J]. *Nature Communications*, 2021, 12(1): 375.
- [43] Hahm T S, Diamond P H. Mesoscopic transport events and the breakdown of Fick's law for turbulent fluxes[J]. *J. Korean Phys. Soc.*, 2018, 73(6): 747-792.
- [44] Mandelbrot B B, Wallis J R. Noah Joseph and operational hydrology[J]. *Water Resources Research*, 1968, 4(5): 909+.
- [45] Boffetta G, Mazzino A, Vulpiani A. Twenty-five years of multifractals in fully developed turbulence: a tribute to Giovanni Paladin[J]. *Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical*, 2008, 41(36).
- [46] Wikipedia contributors. Lévy distribution — Wikipedia, The Free Encyclopedia[EB/OL]. 2022. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=L%C3%A9vy_distribution&oldid=1066083448.
- [47] Bak P, Tang C, Wiesenfeld K. Self-organized criticality - an explanation of $1/f$ noise[J]. *Physical Review Letters*, 1987, 59(4): 381-384.
- [48] Kadanoff L P, Nagel S R, Wu L, et al. Scaling and universality in avalanches[J]. *Physical Review A*, 1989, 39(12): 6524-6537.
- [49] Newman D E, Carreras B A, Diamond P H, et al. The dynamics of marginality and self-organized criticality as a paradigm for turbulent transport[J]. *Physics of Plasmas*, 1996, 3(5): 1858-1866.
- [50] Diamond P H, Hahm T S. On the dynamics of turbulent transport near marginal stability[J]. *Physics of Plasmas*, 1995, 2(10): 3640-3649.
- [51] Hwa T, Kardar M. Avalanches, hydrodynamics, and discharge events in models of sandpiles[J]. *Physical Review A*, 1992, 45(10): 7002-7023.
- [52] Kosuga Y, Diamond P H, Gürçan Ö D. How the propagation of heat-flux modulations triggers $E \times B$ flow pattern formation[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(10).
- [53] Kosuga Y, Diamond P H, Dif-Pradalier G, et al. $E \times B$ shear pattern formation by radial propagation of heat flux waves[J]. *Physics of Plasmas*, 2014, 21(5): 055701.

-
- [54] Rhee T, Kwon J M, Diamond P H, et al. On the mechanism for edge localized mode mitigation by supersonic molecular beam injection[J]. *Physics of Plasmas*, 2012, 19(2): 022505.
- [55] Carreras B A, van Milligen B P, Pedrosa M A, et al. Self-similarity of the plasma edge fluctuations[J]. *Physics of Plasmas*, 1998, 5(10): 3632-3643.
- [56] Dif-Pradalier G, Hornung G, Garbet X, et al. The $E \times B$ staircase of magnetised plasmas[J]. *Nuclear Fusion*, 2017, 57(6): 066026.
- [57] Gürçan Ö D, Diamond P H, Garbet X, et al. Transport of radial heat flux and second sound in fusion plasmas[J]. *Physics of Plasmas*, 2013, 20(2): 022307.
- [58] Norscini C, Ghendrih P, Cartier-Michaud T, et al. Turbulent transport close to marginal instability: role of the source driving the system out of equilibrium[J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2014, 561: 012013.
- [59] Cartier-Michaud T, Ghendrih P, Sarazin Y, et al. Staircase temperature profiles and plasma transport self-organisation in a minimum kinetic model of turbulence based on the trapped ion mode instability[J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2014, 561: 012003.
- [60] Ashourvan A, Diamond P H. How mesoscopic staircases condense to macroscopic barriers in confined plasma turbulence[J]. *Physical Review E*, 2016, 94(5).
- [61] Dritschel D G, McIntyre M E. Multiple jets as PV staircases: The Phillips effect and the resilience of eddy-transport barriers[J]. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 2008, 65(3): 855-874.
- [62] Rhines P B. Waves and turbulence on a beta-plane[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1975, 69(3): 417-443.
- [63] Guo W, Diamond P H, Hughes D W, et al. Scale selection and feedback loops for patterns in drift wave-zonal flow turbulence[J]. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2019, 61(10): 105002.
- [64] Leconte M, Kobayashi T. Zonal profile corrugations and staircase formation: Role of the transport crossphase[J]. *Physics of Plasmas*, 2021: 7.
- [65] Singh R, Diamond P H. A unified theory of zonal flow shears and density corrugations in drift wave turbulence[J]. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2021, 63(3): 035015.
- [66] Depret G, Garbet X, Bertrand P, et al. Trapped ion driven turbulence in tokamak plasmas[J]. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2000, 42(9): 949-971.
- [67] Darmet G, Ghendrih P, Sarazin Y, et al. Intermittency in flux driven kinetic simulations of trapped ion turbulence[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2008, 13(1): 53-58.
- [68] Sarazin Y, Grandgirard V, Fleurence E, et al. Kinetic features of interchange turbulence[J]. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2005, 47(10): 1817-1839.
- [69] Chen L, Lin Z, White R. Excitation of zonal flow by drift waves in toroidal plasmas[J]. *Physics of Plasma*, 2000, 7(8): 3129-3132.
- [70] Dorland W, Hammett G W. Gyrofluid turbulence models with kinetic effects[J]. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 1993, 5(3): 812-835.

-
- [71] Guzdar P N, Kleva R G, Chen L. Shear flow generation by drift waves revisited[J]. *Physics of Plasma*, 2001, 8(2): 459-462.
- [72] Lifshitz E M, Pitaevski L P. *Physical Kinetics*[M]. Ed. by Lifshitz E M, Pitaevski L P. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1981.
- [73] Migliano P, Buchholz R, Grosshauser S R, et al. The radial propagation of turbulence in gyrokinetic toroidal systems[J]. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2015, 57(5): 054008.
- [74] Diamond P H, Itoh S I, Itoh K. *Modern Plasma Physics*[M]. Cambridge University Press, 2010.
- [75] Dupree T H. Theory of phase space density granulation in plasma[J]. *Physics of Fluids*, 1972, 15(2): 334.
- [76] Fisher R A. The wave of advance of advantageous genes[J]. *Annals of Eugenics*, 1937, 7(4): 355-369.
- [77] Kolmogorov A N, Petrovskii I G, Piskunov N S. A Study of the Diffusion Equation with Increase in the Amount of Substance, and Its Application to a Biological Problem in Selected Works of AN Kolmogorov, vol. 1, 242-270[M]. London: Kluwer Academic Publishers (Appeared in Bull. Moscow Univ., Math. Mech. 1: 6 ...
- [78] Frisch U. *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*[M]. Cambridge University Press, 1995.
- [79] Polyanin A D, Nazaikinskii V E. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*[M]. 2nd ed. Chapman, 2015.
- [80] 普里戈金. 从存在到演化[M]. 北京大学出版社, 2007.
- [81] Li J C, Diamond P H. Another look at zonal flows: Resonance, shearing, and frictionless saturation[J]. *Physics of Plasmas*, 2018, 25(4): 042113.
- [82] Groebner R J, Chang C S, Hughes J W, et al. Improved understanding of physics processes in pedestal structure, leading to improved predictive capability for ITER[J]. *Nuclear Fusion*, 2013, 53(9): 093024.
- [83] Chen L. Theory of magnetohydrodynamic instabilities excited by energetic particles in tokamaks*[J]. *Physics of Plasmas*, 1994, 1(5): 1519-1522.
- [84] Zonca F, Briguglio S, Chen L, et al. Transition from weak to strong energetic ion transport in burning plasmas[J]. *Nuclear Fusion*, 2005, 45(6): 477-484.
- [85] Na Y S, Han H, Park S, et al. A new regime that “FIRE” s fusion plasmas for long sustained and high performance reactor conditions[Z/OL]. 2021 [2021-11-30]. <https://www.researchsquare.com/article/rs-935325/v1>.
- [86] Di Siena A, Bilato R, Görler T, et al. New high-confinement regime with fast ions in the core of fusion plasmas[J]. *Physical Review Letters*, 2021, 127(2): 025002.
- [87] Reimerdes H, Berkery J W, Lanctot M J, et al. Evidence for the importance of trapped particle resonances for resistive wall mode stability in high beta Tokamak plasmas[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(21): 215002.

附录 A 补充内容

A.1 其他通量

对第 4.1.4 节湍流强度方程 (4.13) 中出现的通量 $\langle \tilde{T}(A - \bar{\Delta})\tilde{V}_x \rangle$ 可采用同样的准线性近似:

$$\langle \tilde{T}(A - \bar{\Delta})\tilde{V}_x \rangle_k \sim \frac{i(A + \bar{k}_\perp^2)}{\omega - k_y \left(\Omega_Z + \frac{C_i}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{\bar{\Omega}_D}{A + \bar{k}_\perp^2} \right)} \langle \tilde{V}_x^2 \rangle_k \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \left(C_i \frac{\delta_b^2 \partial_x^3 \phi_Z}{A + \bar{k}_\perp^2} - \partial_x \ln \langle T \rangle \right) \quad (\text{A.1})$$

从而有

$$\langle \tilde{T}(A - \bar{\Delta})\tilde{V}_x \rangle \sim \chi_6 \frac{C_i}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \delta_b^2 \partial_x^3 \phi_Z - \chi_5 \partial_x \frac{\ln \langle T \rangle}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \quad (\text{A.2})$$

其中,

$$\chi_6 = \sum_k [\tilde{V}_x(k)]^2 \frac{i}{\omega - k_y \left(\Omega_Z + \frac{C_i}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{\bar{\Omega}_D}{A + \bar{k}_\perp^2} \right)} \quad (\text{A.3})$$

$$\chi_5 = \sum_k [\tilde{V}_x(k)]^2 \frac{i(A + \bar{k}_\perp^2)}{\omega - k_y \left(\Omega_Z + \frac{C_i}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \frac{\bar{\Omega}_D}{A + \bar{k}_\perp^2} \right)} \quad (\text{A.4})$$

A.2 其他输运系数

模型 (4.14) - (4.16) 中的所有的非共振输运系数如下:

$$\chi_1^{\text{non-res}} = 4 \int_0^{k_{y,\max}} \int_0^{k_{x,\max}} |\tilde{\phi}|_{k_x, k_y}^2 \sqrt{2\varepsilon_0} (\rho^2 k_y^2 + \delta^2 k_x^2) \frac{\Lambda k_y (k_{y,\max} - k_y)}{R\Omega_D \left[1 + \Lambda^2 (k_{y,\max} - k_y)^2 \right]^2} dk_x dk_y \quad (\text{A.5})$$

$$\chi_2^{\text{non-res}} = 2 \int_0^{k_{y,\max}} \int_0^{k_{x,\max}} |\tilde{\phi}|_{k_x, k_y}^2 \sqrt{2\varepsilon_0} (\rho^2 k_y^2 + \delta^2 k_x^2) \frac{\Lambda k_y (k_{y,\max} - k_y)}{R\Omega_D \left[1 + \Lambda^2 (k_{y,\max} - k_y)^2 \right]} dk_x dk_y \quad (\text{A.6})$$

$$\chi_3^{\text{non-res}} = 2 \int_0^{k_{y,\max}} \int_0^{k_{x,\max}} |\tilde{\phi}|_{k_x, k_y}^2 \frac{\Lambda k_y (k_{y,\max} - k_y)}{R\Omega_D \left[1 + \Lambda^2 (k_{y,\max} - k_y)^2 \right]} dk_x dk_y \quad (\text{A.7})$$

$$\chi_4^{\text{non-res}} = 2 \int_0^{k_{y,\max}} \int_0^{k_{x,\max}} |\tilde{\phi}|_{k_x, k_y}^2 \frac{1}{A + \rho^2 k_y^2 + \delta^2 k_x^2} \frac{\Lambda k_y (k_{y,\max} - k_y)}{R\Omega_D \left[1 + \Lambda^2 (k_{y,\max} - k_y)^2 \right]} dk_x dk_y \quad (\text{A.8})$$

$$\chi_5^{\text{non-res}} = 2 \int_0^{k_{y,\max}} \int_0^{k_{x,\max}} |\tilde{\phi}|_{k_x, k_y}^2 (A + (\rho^2 k_y^2 + \delta^2 k_x^2)) \frac{\Lambda k_y (k_{y,\max} - k_y)}{R\Omega_D \left[1 + \Lambda^2 (k_{y,\max} - k_y)^2 \right]} dk_x dk_y \quad (\text{A.9})$$

$$\chi_6^{\text{non-res}} = \chi_3^{\text{non-res}} \quad (\text{A.10})$$

使用色散关系模型 (4.19) 和谱函数模型 (4.20) 可积分求出解析解 (这里令 $\alpha = 0$):

$$\begin{aligned} \chi_3^{\text{non-res}} &\simeq \frac{|\tilde{\phi}_0|^2}{\Omega_D} \beta \sigma \left[(\beta^2 + \mu^2 \sigma^2 + 1) \log \left(\left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \left(1 + \frac{1}{\mu^2 \sigma^2} \right) \right) \right. \\ &\quad - 2 \cot^{-1}(\beta) (\beta^3 - \beta \mu^2 \sigma^2 + \beta) \\ &\quad \left. + 2 \mu \sigma (\beta^2 - \mu^2 \sigma^2 - 1) \cot^{-1}(\mu \sigma) \right] \\ &\quad / \left[\rho (\beta^2 (2 - 2\mu^2 \sigma^2) + \beta^4 + (\mu^2 \sigma^2 + 1)^2) \right] \\ &\sim \frac{|\tilde{\phi}_0|^2 \mu^2 \sigma^2}{\Omega_D \rho \left[(\mu^2 \sigma^2 + 1 + \beta^2)^2 - 4\mu^2 \sigma^2 \beta^2 \right]} \\ &\quad \times \left(2\beta \cot^{-1}(\beta) - 2\mu \sigma \cot^{-1}(\mu \sigma) + \log \left(\left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \left(1 + \frac{1}{\mu^2 \sigma^2} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

其中最主要的贡献来自于 $\mu^2 \sigma^2$ 相关的那些项, 从而最终简化为(4.24)。

这里以 χ_2^{res} 为例给出其他共振输运系数的表达式:

$$\begin{aligned} \chi_2^{\text{res}} &= \int_0^{k_{x,\max}} \int_0^{k_{y,\max}} \frac{|\tilde{\phi}_0|^2}{\pi^2 \Delta k_x \Delta k_y} \frac{k_y^2 \delta(\omega_R - k_y \Omega_Z - k_y b_k \Omega_D)}{\left[1 + \left(\frac{k_x - k_{r0}}{\Delta k_x} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{k_y - k_{y0}}{\Delta k_y} \right)^2 \right]} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1}{\tau + \sqrt{2\varepsilon_0} (\rho^2 k_y^2 + \delta^2 k_x^2)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \simeq \frac{|\tilde{\phi}_0|^2 k_{y,\text{res}}^2}{\left[1 + \left(\frac{k_{x,\text{res}}}{\Delta k_x}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{k_{y,\text{res}}}{\Delta k_y}\right)^2\right]} \frac{1}{|\Delta k_y (\Omega_Z + b_{k,\text{res}} \Omega_D)|} \\
 & \quad \times \left(1 - \frac{1}{\tau + \sqrt{2\varepsilon_0} (\rho^2 k_{y,\text{res}}^2 + \delta^2 k_{x,\text{res}}^2)}\right) \tag{A.12}
 \end{aligned}$$

将 Θ_{res} , $\Delta k_y = \beta_y k_{y,\text{max}} = \frac{\beta_y}{\mu_y \rho}$ 和 $\Delta k_x = \beta_x k_{x,\text{max}} = \frac{\beta_x}{\mu_r \rho}$ 代入上面的表达式, 并设 $\beta_x / \mu_r = \beta_y / \mu_y$ 。最终给出如下的近似表达式:

$$\begin{aligned}
 \chi_2^{\text{res}} & \simeq |\tilde{\phi}_0|^2 k_{y,\text{res}}^2 \frac{\sqrt{2\varepsilon_0} \Theta_{\text{res}}}{\left[1 + \left(\frac{\mu_r}{\beta_x}\right)^2 \delta^2 k_{x,\text{res}}^2 + \left(\frac{\mu_y}{\beta_y}\right)^2 \rho^2 k_{y,\text{res}}^2\right]} \\
 & \quad \times \frac{1}{\left|\frac{\beta_y}{\mu_y \rho} \left(\Omega_Z + \Omega_D \frac{1}{\tau + \sqrt{2\varepsilon_0} (\delta^2 k_{x,\text{res}}^2 + \rho^2 k_{y,\text{res}}^2)}\right)\right|} \\
 & \simeq |\tilde{\phi}_0|^2 k_{y,\text{res}}^2 \frac{\beta^2 \sqrt{2\varepsilon_0} \Theta_{\text{res}}}{\beta^2 + \mu^2 \Theta_{\text{res}}} \frac{1}{\left|\frac{\beta_y}{\mu_y \rho} \left(\Omega_Z + \frac{\Omega_D}{\tau + \sqrt{2\varepsilon_0} \Theta_{\text{res}}}\right)\right|} \tag{A.13}
 \end{aligned}$$

致 谢

回想博士期间经历的种种困难，不禁心生感慨。研究生入学时觉得人生充满了可能性，怀揣着很多理想，但随后的研究工作却没有方向更没有成果，还有家庭、生活上的困难都让人情绪低落，渐渐地感到迷茫。我只能尽最大的努力做好每件事，以此宽慰自己真的努力了。很感谢学校的支持，也很感谢母亲的鼓励给了我行动力，我很庆幸后来申请了学校的短期访学项目。通过 7 个月的项目，我去往美国加州大学圣地亚哥分校，接受了 Patrick H. Diamond 教授的指导。时逢新冠全球大流行，但是在 Diamond 教师的指导下找到了研究的突破口，毕业的希望也才渐渐显现。非常感谢 Diamond 教授在我博士期间的精心指导，他在工作上的努力让人敬佩，在我心中树立了一个科学家的榜样。于我而言，Diamond 教授不止是导师有时候更像朋友。从美国回国时，因为疫情下航班限制，经历漫长的隔离、旅行，也让身体和心理承受了很大的压力。所幸选择的坚持比放弃要多，逐渐地获得一些研究成果，生活渐渐回到轨道。困难林林总总，不算多不算少，让我收获了一个更为平静的心态。纵使疾风起，人生不言弃。

衷心感谢导师高喆教授和 Patrick H. Diamond 教授对本人的精心指导。他们的言传身教将使我终生受益。

感谢核工业西南物理研究院 ESL 实验室全体老师和同窗们的热情帮助和支持！

本课题承蒙国家自然科学基金资助，特此致谢。

声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名： 日 期：2022年5月22日

个人简历、在学期间完成的相关学术成果

个人简历

1994年10月12日出生于云南省昆明市。

2012年9月考入清华大学工程物理系核工程与核技术专业，2016年7月本科毕业并获得工学学士学位。

2016年9月免试进入清华大学工程物理系攻读核科学与技术博士至今。

在学期间完成的相关学术成果

学术论文：

- [1] Yan Q, Diamond P H. Physics of turbulence spreading and explicit nonlocality[J]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2021, 63(8): 085017.

指导教师学术评语

湍流输运一直是磁约束聚变等离子体物理的核心问题。由于实验观测与扩散主导的局域输运理论存在偏差，介观尺度上的输运物理受到日益增长的关注。本论文围绕两个重要的介观尺度问题：湍流自扩散和 $E \times B$ 台阶开展理论研究，工作具有重要的理论价值。

论文由晏庆豪同学在导师指导下独立完成，在以下几点上取得创新性成果：(1) 从简化的动理学模型出发，推导获得一个势涡守恒系统，可用于研究多种湍流输运现象；(2) 利用势涡的守恒性质，获得一个包含显式非局域效应的湍流自扩散模型，发现了非局域性对湍流锋面传播速度和穿透深度的增强作用；(3) 获得湍流-剖面演化系统，可自发演化出 $E \times B$ 台阶模式，从而给出通过波-粒子共振输运导致剖面台阶的新机制，并给出台阶触发条件和台阶宽度的估计。

基于论文工作，在国际核心学术期刊上发表和待发布 SCI 论文 2 篇，工作在国际和国内学术会议上进行了报告。论文具有很高的学术价值。

答辩委员会决议书

湍流输运对磁约束聚变等离子体的约束至关重要。论文通过研究势涡的输运来探索湍流的介观演化及其对输运的影响，选题具有重要的科学意义和应用价值。论文创新性成果：

1. 基于简化的动理学理论得到了一个势涡守恒系统，讨论了捕获离子模对介观输运的影响；

2. 发展了一个包含显式非局域效应的湍流自扩散模型，发现了非局域性对湍流锋面传播速度和穿透深度的增强作用；

3. 发展了一个可自发演化出 $E \times B$ 台阶模式的湍流-剖面演化模型，提出了通过波-粒子共振输运导致剖面台阶的新机制，并估计了台阶触发条件和台阶宽度。

论文工作表明作者具有坚实宽广的数理基础和系统深入的专业知识，具备独立从事相关科学研究的能力。论文立论正确，写作规范，国内外研究调研充分。答辩过程表述清楚，回答问题正确。答辩委员会表决，一致同意通过论文答辩，并建议授予晏庆豪工学博士学位。